Veamos algunas propiedades de los ordinales.

Proposición$_{13}$. Sea a un conjunto de ordinales, $a \subseteq OR.$ Así,

1. $\bigcup a \in OR.$ (La unión de un conjunto de ordinales es un ordinal)
2. $\bigcup a = sup_{\leq}\, a.$ Es decir:
   - **i**). $\forall \alpha \in a,\ \alpha \leq \bigcup a$ y
   - **ii**). $\forall \beta \left[\forall \alpha \in a(\alpha \leq \beta) \ \rightarrow\ \bigcup a \leq \beta \right].$

Prueba:
1. La unión de un conjunto de conjuntos transitivos es un conjunto transitivo y el resultado se sigue del **Corolario$_{10}$**.
2. Inmediato de las propiedades de la unión. †

Proposición$_{14}$. Sea A una clase no–vacía de ordinales, $\emptyset \neq A \subseteq OR.$ Así,

1. $\bigcap A \in OR$
2. $\bigcap A = inf\, A = min\, A.$ Es decir:
   - **i**). $\forall \alpha \in A \left(\bigcap A \leq \alpha\right)$
   - **ii**). $\forall \beta \left[\forall \alpha \in A(\beta \leq \alpha) \ \rightarrow\ \beta \leq \bigcap A \right]$
   - **iii**). $\bigcap A \in A$

Prueba: **TAREA**.

Pasemos ahora a ver como trabaja la funcional sucesor $(\_^{+})$ para los ordinales.

Proposición$_{15}$.

1. $\forall \alpha(\alpha^{+} \in OR).$ Así, $^{+} \upharpoonright OR : OR \rightarrow OR.$
2. $\neg \exists \alpha(\alpha^{+} = 0).$ Es decir, $0 \notin Im(^{+} \upharpoonright OR).$
3. $\forall \alpha(\alpha < \alpha^{+}).$
4. **a**) $\forall \alpha, \beta \left[\alpha < \beta \ \rightarrow\ \alpha^{+} \leq \beta \right]$

   b) $\forall \alpha \neg \exists \beta \left[\alpha < \beta \ \&\ \beta < \alpha^{+} \right]$

   La sucesor, restringida a $OR,$ nos dá el sucesor inmediato
5. $\forall \alpha, \beta\, [\alpha < \beta \rightarrow \alpha^{+} < \beta^{+}]$: La sucesor, restringida a $OR,$ es monótona
6. $\forall \alpha, \beta\, [\alpha \neq \beta \rightarrow \alpha^{+} \neq \beta^{+}]$: La sucesor, restringida a $OR,$ es inyectiva.

Prueba: **1** ya se probó; **2** y **3** se deben a las definiciones de sucesor y del orden entre ordinales. Veamos **4.a**. Supongamos que $\alpha < \beta,$ por lo que $\alpha \in \beta.$ De esto tenemos, por un lado que $\alpha \subsetneq \beta$ y por otro que, $\{\alpha\} \subseteq \beta.$ Así, $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta,$ es decir, $\alpha^{+} \leq \beta.$ **4.b**

se sigue de **4.a**. Ahora, **5** se sigue de **4.a** y **3**. Finalmente, **6** se sigue de **5** al considerar la tricotomía del orden $(<)$. †

Definición$_{16}$. Sea $\alpha \in OR,$ decimos que

α es *(Un Ordinal) Sucesor* syss $\exists \beta(\beta^{+} = \alpha)$

α es *(Un Ordinal) Límite* syss $\alpha \neq 0$ & α no es sucesor.

Ejemplos:

1. Son sucesores: $1, 2, 3, \ldots, n^{+}$ (con $n \in \omega$) y también lo son: $\omega^{+}, (\omega^{+})^{+}, ((\omega^{+})^{+})^{+},$ en general: $\forall \alpha,\ \alpha^{+}$ es sucesor.

2. El 0 y ω no son sucesores.

3. ω es límite.

4. El 0 no es límite.

Con estas definiciones tenemos que para un ordinal $\alpha,$ sólamente se cumple uno y solo uno de los siguientes casos:

a) $\alpha = 0,$ o
b) α es sucesor , o
c) α es límite.

La existencia de un ordinal límite – a saber ω – nos la garantiza el axioma de Infinito (**ZF$_7$**), pero ¿hay otros ordinales límites? la respuesta es sí; basados en el Axioma de Fraenkel, el esquema axiomático de sustitución (**ZF$_8$**):

Por el Esquema de Recursión para $\omega,$ hay una (única) funcional F tal que:

$$F : \omega \to OR$$

i) $F(0) = \omega$

ii) $\forall n \in \omega,\ F(n^{+}) = (F(n))^{+}$

Por **ZF$_8$**, $F[\omega] \in V$ y puesto que es de ordinales, $\cup F[\omega]$ es un ordinal, y no es difícil ver que es un límite, distinto de $\omega.$ (A este ordinal, más adelante lo llamaremos $\omega + \omega$ o también $\omega \cdot 2$).

Notación: $LIM = \left\{\alpha \ / \ \alpha \text{ es límite}\right\}.$

La clase de los ordinale límites es propia, el razonamiento que hicimos para encontrar otro distinto de $\omega,$ lo podemos generalizar:

Proposición$_{17}$. (LIM es confinal con OR)

$$\forall\alpha\,\exists\beta\left[\alpha<\beta\ \&\ \beta\in LIM\right]$$

Prueba: **TAREA**. †

Corolario$_{18}$. $LIM \notin V$.

Pasemos ahora a ver algunas propiedades de los ordinales límites. La primera es que son cerrados bajo la operación sucesor.

Proposición$_{19}$.

1. $\forall\alpha\left[\alpha\in LIM\ \rightarrow\ \forall\beta(\beta<\alpha\rightarrow\beta^{+}<\alpha)\right]$

2. $\forall\alpha\left[\forall\beta(\beta<\alpha\rightarrow\beta^{+}<\alpha)\ \&\ \alpha\neq 0\ \rightarrow\ \alpha\in LIM\right]$

Prueba:

1.] Supongamos que $\beta<\alpha.$ Por la **Proposición$_{15.4}$**, $\beta^{+}\leq\alpha,$ Pero si $\alpha\in LIM,$ es imposible que $\beta^{+}=\alpha,$ por lo tanto $\beta^{+}<\alpha.$

2.] La contrapositiva es inmediata al negar la definición de límite. †

Proposición$_{20}$. $\forall\alpha\left[\alpha\in LIM\ \leftrightarrow\ \alpha \text{ es inductivo}\right]$

Prueba: la "ida" es inmediata de la proposición anterior y de que el $0\in OR.$ Veamos el regreso: Supongamos que α es inductivo, así $0\in\alpha$ y por tanto $\alpha\neq 0;$ y como $\forall\beta\,[\beta\in\alpha\rightarrow\beta^{+}\in\alpha],$ tenemos que α no puede ser sucesor. †

Corolario$_{21}$. El ordinal ω es el primer límite. En símbolos:

$$\forall\alpha\left[\alpha\in LIM\ \rightarrow\ \omega\leq\alpha\right]$$

Veamos ahora como trabaja la unión sobre los límites.

Proposición$_{22}$.

1. $\bigcup 0=0.$

2. $\bigcup\alpha^{+}=\alpha.$

3. **a**. $\forall\alpha\left[\alpha\in LIM\ \rightarrow\ \bigcup\alpha=\alpha\right].$

b. $\forall\alpha\left[\bigcup\alpha=\alpha\ \&\ \alpha\neq 0\ \rightarrow\ \alpha\in LIM\right].$

Prueba: **1**. y **2**. son inmediatas de las definiciones y propiedades básicas.

3.a.] Puesto que α es transitivo, tenemos que $\cup\,\alpha\subseteq\alpha.$ Veamos la otra contención; sea $\beta\in\alpha,$ ahora bien, si $\alpha\in LIM,$ entonces, por la **Proposición$_{19.1}$**,

$\beta^+ < \alpha.$ Tenemos pues, $\beta \in \beta^+ \in \alpha,$ es decir $\beta \in \bigcup\alpha.$

3.b.] Procedamos por contrapositiva: Supongamos que $\alpha \notin LIM,$ así $\alpha = 0$ o hay un β tal que $\beta^+ = \alpha.$ En el primer caso, ya terminamos; en el otro, $\bigcup\alpha = \bigcup(\beta^+) = \beta < \beta^+ = \alpha,$ por lo que $\bigcup\alpha \neq \alpha.$ †

Proposición$_{23}$. *Principio de Inducción para* OR *(Segunda forma)*.

Sea φ una fórmula conjuntista.

Si

i). $\varphi(0),$

ii). $\forall a\left[\varphi(\alpha) \rightarrow \varphi(\alpha^+)\right]$ y

iii). $\forall\alpha \in LIM\left[\forall\beta(\beta < \alpha \rightarrow \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\alpha)\right],$

entonces

$$\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$$

Prueba: Supongamos que φ es una fórmula que cumple con **i**), **ii**) y **iii**). Queremos probar que $\forall\alpha\ \varphi(\alpha)$ y para esto usaremos la primera forma del Principio de Inducción. Supongamos pues, que α es un ordinal arbitrario, que cumple con:

$$\forall\beta < \alpha,\ \varphi(\beta) \qquad \textbf{HI}$$

probemos que $\varphi(\alpha).$ Debido a la naturaleza de $\alpha,$ tenemos 3 casos posibles:

$\alpha = 0$] Por **i**), tenemos $\varphi(0),$ es decir $\varphi(\alpha).$

$\alpha = \beta^+$] Sabemos que $\beta < \beta^+ = \alpha,$ por **HI**, $\varphi(\beta)$ y ahora por **ii**), tenemos $\varphi(\beta^+),$ es decir $\varphi(\alpha).$

$\alpha \in LIM$] $\varphi(\alpha)$ se sigue de **HI** y **iii**). †