Preliminares a Recursión General

En lo que sigue sean, A una clase, R una relacional y $a \in V$.

Definición₁. El conjunto a es R–*Transitivo syss*

$$\forall x,y \left[(x \in a \ \& \ yRx) \ \rightarrow \ y \in a \right]$$

OjO: a es transitivo syss a es $\in$–transitivo.

Definición₂.

1. El R–*Segmento Inicial (Propio) determinado por* a es la clase de todos los R–predesesores de a, exepto por a mismo.

$$a_R = \left\{ w \ / \ wRa \ \& \ w \neq a \right\}$$

2. R es *Izquierda Limitada sobre* A syss todos los segmentos iniciales son conjuntos.

$$\forall x \in A \, [x_R \in V]$$

OjO:

1. a es R–transitivo syss $\forall x \in a \, [x_R \subseteq a]$

2. Si $a \notin CMP(R)$, entonces $a_R = \emptyset$

3. $a_\in = a$

Proposición₃. Si R es izquierda limitada sobre A y $CMP(R) \subseteq A$, entonces para cada conjunto a, hay un (único) conjunto b tal, que

1) $b \supseteq a$

2) b es R–transitivo

3) $\forall c \left[c \supseteq a \ \& \ c \text{ es } R\text{–transitivo} \ \rightarrow \ c \supseteq b \right]$

Prueba: Por el teorema de recursión para ω, hay una (única) función f tal, que

$$f : \omega \rightarrow V$$

(**i**) $f(0) = a$

(**ii**) $\forall n \in \omega, f(n^+) = \bigcup \left\{ x_R \ / \ x \in f(n) \right\}$

en este caso $\bigcup \left\{ x_R \ / \ x \in f(n) \right\} \in V$, pues R es izquierda limitada.

Sea $b = \bigcup\limits_{n \in \omega} f(n)$. El conjunto b es el buscado, pues

1)] $a = f(0) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} f(n) = b.$

2)] Sean u y v tales que uRv y $v \in b.$ Hay un $n_0 \in \omega$ tal que $v \in f(n_0);$ ahora, teniendo en cuenta que $u \in v_R,$ tenemos que $u \in \bigcup\left\{x_R \ / \ x \in f(n_0)\right\} = f(n_0^+)$ y por tanto $u \in b.$

3)] Sea c un conjunto R–transitivo tal que $c \supseteq a.$ Debemos probar que

$$c \supseteq b = \bigcup_{n\in\omega} f(n)$$

que por las propiedades de la unión, basta ver que $\forall n \in \omega\, [c \supseteq f(n)]$ y esto lo haremos por inducción (1a. forma) para ω :

I.] $f(0) = a \subseteq c.$

II.] Sea $n \in \omega$ y supongamos inductivamente que $f(n) \subseteq c,$ veamos que $f(n^+) \subseteq c.$ Sea $u \in f(n^+),$ es decir, $u \in \bigcup\left\{x_R \ / \ x \in f(n)\right\}.$ Hay pues un $v \in f(n)$ tal que $u \in v_R.$ Usando la **H.I.**, tenemos que $v \in c$ y como c es R–transitivo, entonces $v_R \subseteq c$ y por tanto $u \in c.$ †

Notación: Al conjunto b se le llama *la Clausura R–Transitiva de a* y se denotará por $CT_R(a).$ En el caso particular de la relacional $\in$ le llamaremos, *la Clausura Transitiva de a* y pondremos simplemente, $CT(a).$

Pasamos a dar una noción que antes teníamos para conjuntos ahora para clases en general.

Definición$_4$. Diremos que la relacional R *Bien Funda a* la clase A o que la clase A *está Bien Fundada por R* syss todo subconjunto no–vacío de A tiene un elemento R–minimal:

$$\forall x \subseteq A \left[x \neq \emptyset \ \rightarrow \ \exists y \in x \neg\exists z\left(z \in x \ \ \& \ \ zRy\right)\right]$$

En el caso en que $A = CAMP(R)$ simplemente se dirá que R *está Bien Fundada.*

Observación. Son equivalentes:

i) R Bien Funda a A

ii) $\forall x \subseteq A\left[x \neq \emptyset \ \rightarrow \ \exists y \in x\, \forall z\left(z \in x \ \rightarrow \ \neg\left(zRy \right)\right)\right]$

iii) $\forall x \subseteq A\left[x \neq \emptyset \ \rightarrow \ \exists y \in x\, \forall z\left(zRy \ \rightarrow \ z \notin x\right)\right]$

iv) $\forall x \subseteq A\left[x \neq \emptyset \ \rightarrow \ \exists y \in x\left(y_R \cap x \ = \ \emptyset\right)\right]$

Proposición$_5$. Si R bien funda a A, entonces

i) R es irreflexiva en A, e.d. $\forall w \in A \neg(wRw)$ y

ii) R es asimétrica en A, e.d. $\forall x,y \in A \left[xRy \to \neg(yRx) \right]$ o $\neg\exists x,y \in A \left[xRy \;\&\; yRx \right]$

iii) No hay una sucesión finita de elementos de A, digamos $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n+1} \rangle$, tales que $a_1Ra_0,\ a_2Ra_1, \ldots,\ a_{n+1}Ra_n,\ a_0Ra_{n+1}$

Prueba: Son inmediatas de la definición (**EJERCICIO**). †

Proposición$_6$.

a. Si R bien funda a A, entonces **no** hay una sucesión infinita $\langle a_i \rangle_{i\in\omega}$, de elementos de A, tal que

$$\forall i \in \omega \left[a_{i+1} \;\; r \;\; a_i \right]$$

b. La conversa de la anterior es cierta bajo la suposición del **AED**.

Prueba: **TAREA**. †

OjO: El axioma de buena fundación (**ABF**) es equivalente a que la relacional $\in$ bien funde al universo, V.