

## Principio de Minimalidad para Relacionales Bien Fundadas PM/RBF

Sea  $R$  una relacional con  $A = CMP(R)$ .

Si  $R$  es una relacional bien fundada e izquierda limitada sobre  $A$ , entonces toda subclase no vacía de  $A$ , tiene un elemento  $R$ -minimal, e.d.

$$\emptyset \neq B \subseteq A \rightarrow \exists y \in B \forall z \in B (\neg zRy)$$

o equivalentemente, si  $\Psi(x)$  es una fórmula conjuntista, entonces

$$\exists x \in A \Psi(x) \rightarrow \exists y \in A \left[ \Psi(y) \ \& \ \forall z (zRy \rightarrow \neg \Psi(z)) \right]$$

### Prueba:

Supongamos  $x_0 \in A$  con la propiedad  $\Psi(x_0)$ .

Si  $\forall z (zRx_0 \rightarrow \neg \Psi(z))$ , no hay nada que probar,  $x_0$  es el buscado. Supongamos pues, que

$$\exists z \left[ zRx_0 \ \& \ \Psi(z) \right] \quad (*)$$

Consideremos a  $a = CT_R(\{x_0\})$  ( $R$  es izquierda limitada sobre  $A$ ) y sea

$$b = \left\{ z \in a \mid \Psi(z) \right\}$$

tenemos que  $\emptyset \neq b \subseteq A$  (pues  $x_0 \in b$ ). Así, hay un elemento,  $y_0$ ,  $R$ -minimal en  $b$ . Es decir:

- (1)  $y_0 \in b$  y
- (2)  $\forall z (zRy_0 \rightarrow z \notin b)$

Veamos que  $y_0$  es el conjunto buscado. En efecto,

(i) Por (1) tenemos que,  $y_0 \in a \subseteq CMP(R) = A$  y  $\Psi(y_0)$ .

(ii)  $\forall z (zRy_0 \rightarrow \neg \Psi(z))$  : Pues supongamos que  $zRy_0$ . Por (2), tenemos que  $z \notin b$  y, debido a la definición de  $b$ , tenemos que o  $z \notin a$  o  $\neg \Psi(z)$ . Pero ya que como  $y_0 \in a$ , como  $a$  es  $R$ -transitivo y  $zRy_0$  tenemos que  $z \in a$ . Concluimos que,  $\neg \Psi(z)$ . †

## Principio de Inducción para Relacionales Bien Fundadas PI/RBF

Sean  $R$  una relacional bien fundada e izquierda limitada sobre  $A$  y  $\chi(x)$  una fórmula conjuntista, entonces

$$\forall y \in A \left[ \forall z (zRy \rightarrow \chi(z)) \rightarrow \chi(y) \right] \rightarrow \forall x \in A \chi(x)$$

**Prueba:** En el PM/RBF tomar  $\Psi(x) \Leftrightarrow \neg\chi(x)$  y posteriormente la contrapositiva. †

### Algunos comentarios:

La Relacional  $\in$  es izquierda limitada (pues  $a_{\in} = \{x / x \in a\} = a$ ).

Puesto que el **Axioma de Buena Fundación (ABF)** no es mas que una reformulación de la afirmación: la  $\in$  bien funda a  $V$ , tenemos que bajo esta suposición, es cierto el siguiente principio:

Sea  $\psi$  una fórmula conjuntista. Así

$$\forall x \left[ \forall y (y \in x \rightarrow \psi(y)) \rightarrow \psi(x) \right] \rightarrow \forall x \psi(x)$$

es decir: *todos los conjuntos tienen una propiedad, siempre que uno arbitrario la tenga, bajo la suposición de que todos sus elementos la tengan.* Al cual bien podríamos llamar  $\in$ -**Inducción**.

También, bajo la suposición del **ABF**, tenemos lo correspondiente al principio de minimalidad:

$$\exists x \Psi(x) \rightarrow \exists y \left[ \Psi(y) \ \& \ \forall z (z \in y \rightarrow \neg \Psi(z)) \right]$$

El cual es una forma fuerte de dicho axioma.