Esquema General de Recursión para Ordinales

Sabemos que la $\in_{OR}$ bien funda a OR –de hecho, lo bien ordena– además, para todo $\alpha \in OR$, se tiene que $\alpha_{\in_{OR}} = \alpha \in V$, es decir la $\in_{OR}$ es izquierda limitada. Con esto tenemos que la $\in_{OR}$ cumple con las hipótesis del esquema general de recursión para relacionales bien fundadas. Así, podemos enunciar la siguiente,

Proposición (**EGR**/**OR**–Primera Forma). Para cada $G : V \to V$, existe una única funcional F, tal que

$$F : OR \to V$$
$$\forall \alpha, \quad F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

Hay otra forma para este resultado.

Proposición (**EGR**/**OR**-Segunda Forma). Sean $a \in V$, $H : V \to V$ y $J : V \to V$. Así, existe una única funcional F, tal que:

$$F : OR \to V$$

I. $F(0) = a$

II. $\forall \alpha, F(\alpha^+) = H(F(\alpha))$

III. $\forall \alpha \in LIM, F(\alpha) = J(F[\alpha])$

Prueba: Vamos a reducir este resultado al anterior. Para ello definimos el funcional G como sigue:

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle \in G \ &\leftrightarrow \ G(x) = y \\
&\leftrightarrow \ \big[x = 0 \ \& \ y = a\big] \\
&\qquad \vee \ \Big[x \in FNC \ \& \ \exists \alpha \Big(DOM(x) = \alpha^+ \ \& \ y = H(x(\alpha))\Big)\Big] \\
&\qquad \vee \ \Big[x \in FNC \ \& \ \exists \alpha \Big(\alpha \in LIM \ \& \ DOM(x) = \alpha \ \& \ y = J(x[\alpha])\Big)\Big] \\
&\qquad \vee \ \Big[\Big(\Big(x \in FNC \ \& \ DOM(x) \notin OR\Big) \vee x \notin FNC\Big) \ \& \ y = 0\Big]
\end{aligned}$$

Por la proposición anterior, hay una funcional F, tal que para todo ordinal α,

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

pero entonces:

I. $F(0) = G(F \restriction 0) = G(0) = a,$

II. $F(\alpha^+) = G(F \restriction \alpha^+) = H(F(\alpha))$ y

III. Si $\alpha \in LIM,$ entonces $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha) = J(F[\alpha]).$

Con esto hemos probado la existencia de una funcional que cumpla con lo requerido, falta ver que ésta es única.

Supongamos pues que hay otra funcional, digamos $F',$ cuyo dominio fueran los ordinales y la cual cumple con **I**, **II** y **III**. Tenemos que probar que $F = F'$ y para esto basta ver que tienen la misma regla, es decir $\forall\alpha\ [F(\alpha) = F'(\alpha)].$

Una prueba trivial para ello nos lo proporciona la segunda forma del Principio de Inducción para Ordinales. †