Teorema de Enumeración

Proposición. Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.
Prueba: Puesto que dos ordinales isomorfos son iguales, solo falta probar la parte existencial.

Sea $\langle a,<\rangle \in COBO$. Sea b un conjunto cualquiera, con la única condición de que $b \notin a$. Definimos recursivamente sobre OR, la siguiente funcional:

$$F : OR \to V$$

$$\forall \xi,\ F(\xi) = \begin{cases} min_{<}\big(a \setminus F[\xi]\big) & \text{si} \quad a \setminus F[\xi] \neq \emptyset \\ \text{o} & \\ b & \text{si} \quad a \setminus F[\xi] = \emptyset \end{cases}$$

OjO$_0$. F está bien definida (**Tarea**).

OjO$_1$. $F : OR \to a \cup \{b\}$.

OjO$_2$. $\forall \xi \Big[F(\xi) = b \ \to \ a \setminus F[\xi] = \emptyset \Big]$ o equivalentemente

$$\forall \xi \Big[F(\xi) = b \ \to \ a \subseteq F[\xi] \Big]$$

(Aquí se toma en cuenta que, $b \notin a$.)

Af$_1$. $\forall \xi_1, \xi_2 \Big[\xi_1 \in \xi_2 \ \&\ F(\xi_1) = b \ \to \ F(\xi_2) = b \Big]$.

Supongamos pues, $\xi_1 \in \xi_2$. Así, $\xi_1 \subsetneq \xi_2$ y por tanto $F[\xi_1] \subseteq F[\xi_2]$ y de aquí que $a \setminus F[\xi_2] \subseteq a \setminus F[\xi_1]$. Ahora bien, si $F(\xi_1) = b$, por **OjO$_2$**, tenemos que $a \setminus F[\xi_1] = \emptyset$ y de aquí que $a \setminus F[\xi_2] = \emptyset$. Por la definición de F, tenemos que $F(\xi_2) = b$.

Af$_2$. $\forall \xi_1, \xi_2 \Big[\xi_1 \in \xi_2 \ \&\ F(\xi_2) \neq b \ \to \ F(\xi_1) \neq b \ \&\ F(\xi_1) \neq F(\xi_2) \Big]$.

Supongamos que $\xi_1 \in \xi_2$ y que $F(\xi_2) \neq b$. Es imposible que $F(\xi_1) = b$, pues esto contradiría la **Af$_1$**. Ahora bien, como $\xi_1 \in \xi_2$, tenemos, por un lado, que $F(\xi_1) \in F[\xi_2]$. Por otro lado, como $F(\xi_2) \neq b$, tenemos que $F(\xi_2) = min_{<}\big(a \setminus F[\xi_2]\big)$ y por tanto $F(\xi_2) \notin F[\xi_2]$. Así, $F(\xi_1) \neq F(\xi_2)$.

Af$_3$. $\exists \gamma \Big[F(\gamma) = b \Big]$.

Supongamos lo contrario, es decir que $F(\gamma) \neq b$ para todo ordinal γ. Por la **Af$_2$**, F es inyectiva y, obviamente, sobre su imagen. De aquí que F^{-1} es una funcional biyectiva, con $DOM(F^{-1}) = IMG(F) = F[OR]$ e $IMG(F^{-1}) = DOM(F) = OR$. Pero, por **OjO$_1$**, $F[OR] \subseteq a \cup \{b\}$, es decir $DOM(F^{-1}) \in V$ y que por el Axioma de Sustitución, **ZF$_8$**, tendríamos que $IMG(F^{-1}) \in V$, es decir, $OR \in V$. $\underset{\circ}{\nabla}$!!!

Af$_4$. $\exists\alpha\left[\left\langle\alpha,\ \in\right\rangle \simeq \left\langle a,\ <\right\rangle\right].$

Gracias a la **Af$_3$**, podemos considerar al primer ordinal cuya imagen, bajo F, es b. Sea pues,

$$\alpha = \bigcap\left\{\xi\ /\ F(\xi) = b\right\}$$

Así,

i). $F(\alpha) = b$, y

ii). $\forall\xi\left[\xi \in \alpha \rightarrow F(\xi) \neq b\right]$

Sea

$$f = F \upharpoonright \alpha$$

Observemos que f tiene las siguientes propiedades:

a). f es una función, pues F es funcional y $\alpha \in V$.

b). $DOM(f) = DOM(F) \cap \alpha = OR \cap \alpha = \alpha$.

c). $IMG(f) = a$. Por **i**) y **OjO$_2$** tenemos que, $a \subseteq F[\alpha]$. Por otro lado, por **OjO$_1$**, $F[\alpha] \subseteq F[OR] \subseteq a \cup \{b\}$; ahora, por **ii**), tenemos que $F[\alpha] \subseteq a$. Finalmente, $IMG(f) = F[\alpha] = a$.

d). $\forall\xi \in \alpha, f(\xi) = F(\xi) \underset{\textbf{ii)}}{=} min_{<}(a \setminus f[\xi])$.

e). f es inyectiva, gracias a **i**), **ii**) y a la **Af$_2$**

Tenemos pues que f es una función, con dominio α, es inyectiva y es sobre a. Es decir $\alpha \sim_f a$. Para que f sea un isomorfismo, nos bastaría probar que f es monótona.

Sean pues, $\xi_1, \xi_2 \in \alpha$, tales que $\xi_1 \in \xi_2$, veamos que $f(\xi_1) < f(\xi_2)$.

Tenemos que $f(\xi_1) = min_{<}(a \setminus f[\xi_1])$, es decir:

I). $f(\xi_1) \in a \setminus f[\xi_1]$, y
II). $\forall x \in (a \setminus f[\xi_1]), f(\xi_1) \leq x$.

Afirmamos que $f(\xi_2) \in a \setminus f[\xi_1]$. Pues, en caso contrario, si $f(\xi_2) \in f[\xi_1]$, habría un $\gamma \in \xi_1$, con la propiedad de que $f(\gamma) = f(\xi_2)$; y de aquí que, debido a la inyectividad de f, tendríamos $\gamma = \xi_2$; concluyendo que $\xi_2 \in \xi_1$ $\underset{\bigcirc}{\nabla}$!!!

Finalmente, por **II**)., $f(\xi_1) \leq f(\xi_2)$. Pero la igualdad es imposible, por la inyectividad de f, teniendo pues que, $f(\xi_1) < f(\xi_2)$.

Concluimos que, $\langle\alpha,\in\rangle \simeq_f \langle a,<\rangle$ †

Otra prueba:

Como $\langle a,<\rangle \in COBO,$ podemos utilizar el **EGR**/**RBF**:

Hay una (única) función f tal, que:

$$f : a \to V$$
$$\forall x \in a, f(x) = \left\{ f(y) \ / \ y < x \right\}$$

OjO: Para ver que f está bien definida, basta tomar la funcional $G,$ como $G(x) = IMG(x).$

Probaremos que $f[a]$ es un ordinal, digamos $\alpha,$ y que f es un isomorfismo de $\langle a,<\rangle$ sobre $\langle \alpha,\in\rangle.$

Af$_1$. $\forall x \in a, \left[f(x) \in OR \right].$

Esto lo probaremos usando el **PI**/**RBF**, en su primera forma. Sea pues, $x \in a$ y supongamos inductivamente que:

$$\forall y \in a \left[y < x \to f(y) \in OR \right]$$

Entonces, por definición de $f,$ tenemos que $f(x)$ es un conjunto de ordinales. Además, $f(x)$ es transitivo, ya que si $u \in f(y)$ y $f(y) \in f(x),$ entonces $u = f(z)$ para algún $z < y$ y con $y < x.$ Por tanto $z < x$ y de aquí que $u = f(z) \in f(x).$ Se sigue que $f(x)$ es un ordinal.

Af$_2$. $f[a] \in OR.$

Por la afirmación anterior, tenemos que $f[a]$ es un conjunto de ordinales. Pero $f[a]$ es transitivo, por la misma razón que dimos antes.

Sea $\alpha = f[a].$

Af$_3$. $\langle a,<\rangle \simeq_f \langle \alpha,\in\rangle.$

Obviamente, f es una función con $DOM(f) = a$ y sobre su imágen, $IMG(f) = \alpha.$ Nos faltaría ver que es monótona, es decir:

$$\forall x,y \in a \left[x < y \to f(x) \in f(y) \right]$$

Pero esto es inmediato de la definición de $f.$

Definición. Al único ordinal al cual es isomorfo un conjunto bien ordenado, le llamaremos su *Tipo de Orden*. Formalmente:

$$to : COBO \rightarrow OR$$

para $\langle a,<\rangle \in COBO, \quad to(\langle a,<\rangle) = \bigcap\left\{\alpha \;/\; \langle \alpha,\in\rangle \simeq \langle a,<\rangle\right\}$

- $to(\langle a,<\rangle) = a$ syss $a \in OR$ y $< \; = \; \in_{OR}$.
- $to(\langle a,<\rangle) = 0$ syss $a = \emptyset = \; <$.
- Si $\langle a,<_a\rangle, \langle b,<_b\rangle \in COBO$, entonces

$$to(\langle a,<_a\rangle \circ \langle b,<_b\rangle) = to(\langle a,<\rangle) + to(\langle b,<_b\rangle)$$