Aritmética Finita de Cardinales

Suma y Producto

Definición$_1$.

$$+ : card \times card \to card$$
$$\kappa + \lambda = \left| \kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \right|$$

Definición$_2$.

$$\cdot : card \times card \to card$$
$$\kappa \cdot \lambda = \left| \kappa \times \lambda \right|$$

Ejemplos:

1. $\kappa + 0 = \kappa$, $\kappa \cdot 0 = 0$ y $\kappa \cdot 1 = \kappa$

2. Tanto la suma como el producto cardinal restringidas a los naturales, coinciden con las ya conocidas.

3. $\forall n \in \omega$, $\aleph_0 + n = \aleph_0$ y $\forall n \in \omega \setminus \{0\}$, $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$.

4. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$.

Proposición$_0$. Si $a, b \in BO$, entonces:

a). **i**). $| a \cup b | \leq | a | + | b |$

ii). $a \cap b = \emptyset \to | a \cup b | = | a | + | b |$

b). $| a \times b | = | a | \cdot | b |$

c). Si $\kappa = | k |$ y $\lambda = | l |$, entonces $\kappa \cdot \lambda = | k \times l |$, $| k \cup l | \leq \kappa + \lambda$ y si $k \cap l = \emptyset$, se tiene que $\kappa + \lambda = | k \cup l |$

Prueba: **Ejercicio.** †

Proposición$_1$. Conmutatividad:

a). $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$

b). $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

Prueba: **Ejercicio.** †

Proposición$_2$. Asociatividad:

a). $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$

b). $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

Prueba: **Ejercicio**. †

Proposición$_3$. Distributividad:

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$$

Prueba: Sean $k, l, m \in V$ tales que $l \cap m = \emptyset$, $|k| = \kappa$, $|l| = \lambda$ y $|m| = \mu$. El resultado se sigue del hecho:

$$k \times (l \cup m) = (k \times l) \cup (k \times m)$$ †

Proposición$_4$. Las operaciones $+$ y $\cdot$ son compatibles con el órden, $\leq$.

a). $\kappa \leq \lambda \rightarrow \kappa + \mu \leq \lambda + \mu$

b). $\kappa \leq \lambda \rightarrow \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$

Prueba: Sean $k, l, m \in V$ tales que $k \cap m = \emptyset = l \cap m$, $|k| = \kappa$, $|l| = \lambda$ y $|m| = \mu$; y sea f testigo de que $k \precsim_f l$. Definimos i y j como sigue:

$$i : k \cup m \rightarrow l \cup m \qquad \text{y} \qquad j : k \times m \rightarrow l \times m$$

$$\forall x \in k \cup m, \quad i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in k \\ \text{o} & \\ x & \text{si } x \in m \end{cases} \qquad \forall \langle x,y \rangle \in k \times m, \quad j(x,y) = \langle f(x), y \rangle$$

Tenemos, $k \cup m \underset{i}{\precsim} l \cup m$ y que $k \times m \underset{j}{\precsim} l \times m$. †

Proposición$_5$.

$$\kappa, \lambda \geq 2 \rightarrow \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$$

Prueba: Sean $k, l \in V$ tales que $k \cap l = \emptyset$ y $|k| = \kappa \geq 2$ y $|l| = \lambda \geq 2$. Basta ver que $k \cup l \precsim k \times l$. Sean $a_0, a_1 \in k$ y $b_0, b_1 \in l$. Definimos,

$$h : k \cup l \rightarrow k \times l$$

$$\forall x \in k \cup l, \ h(x) = \begin{cases} \langle x, b_0 \rangle & \text{si } x \in k \\ \text{o} & \\ \langle a_0, x \rangle & \text{si } x \in l \setminus \{b_0\} \\ \text{o} & \\ \langle a_1, b_1 \rangle & \text{si } x = b_0 \end{cases}$$

Así, $k \cup l \underset{h}{\precsim} k \times l$. †

Ejercicio: ¿ Qué ocurre si $\kappa < 2$ o $\lambda < 2$? Justifique.

Proposición$_6$.

1. $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$
2. $\kappa \neq 1 \rightarrow \kappa + \kappa \leq \kappa \cdot \kappa$

Prueba: **Ejercicio**. †

Usando la parte **1**. de la proposición anterior junt con la **Proposición$_4$**, se puede dar otra prueba –mucho más sencilla– de la **Proposición$_5$**. S.p.g. supongamos que $2 \leq \kappa \leq \lambda$. Así tenemos que,

$$\kappa + \lambda \underset{\kappa \leq \lambda}{\leq} \lambda + \lambda = 2 \cdot \lambda \underset{2 \leq \kappa}{\leq} \kappa \cdot \lambda$$

Pasemos ahora a calcular el producto cardinal, $\kappa \cdot \lambda$.

Definición$_0$. $\gamma \in OR$. El *Orden Canónico* sobre $\gamma \times \gamma$, denotado por $\triangleleft_\gamma$, queda definido como sigue:

1. $\triangleleft_\gamma \subseteq (\gamma \times \gamma) \times (\gamma \times \gamma)$, y
2. Si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \gamma$, entonces

$$\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \triangleleft_\gamma \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cup \beta_1 < \alpha_2 \cup \beta_2 \\ \text{O} \\ \alpha_1 \cup \beta_1 = \alpha_2 \cup \beta_2 \text{ y } \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle <_L \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \end{cases}$$

donde $<_L$ es el órden lexicográfico en $\gamma \times \gamma$.

Lema$_1$.

1). $\langle \gamma \times \gamma, \triangleleft_\gamma \rangle \in COBO$.

2). Si $\alpha, \beta < \delta < \gamma$, entonces $\langle \alpha, \beta \rangle_{\triangleleft_\gamma} \subseteq \delta \times \delta$.

Prueba: **TAREA**. †

Lema$_2$. Sean $\kappa \in card$ y $\langle a, r \rangle \in COBO$.
Si

i). $\kappa \leq |a|$, y

ii). $\forall x \in a, |x_r| < \kappa$,

entonces $\langle a, r \rangle \simeq \langle \kappa, \in_\kappa \rangle$

Prueba: Sea α el único ordinal tal que $\langle a, r \rangle \simeq \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$. Veamos que $\kappa = \alpha$.

$\leq \Big]$ $\kappa \underset{\mathbf{i})}{\leq} | a | \underset{a \sim \alpha}{=} | \alpha | \leq \alpha.$

$\not< \Big]$ Supongamos lo contrario, con la intención de llegar a una contradicción. Supongamos pues, que $\kappa < \alpha$, así $\kappa \in \alpha$ y puesto que $\langle a, r \rangle \simeq \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$, hay un $x \in a$, tal que

$$\langle x_r, r \restriction x_r \rangle \simeq \langle \kappa, \in_\kappa \rangle$$

pero entonces $| x_r | = \kappa \underset{\circ}{\nabla}$!! la hipótesis **ii**). †

Lema₃.

$$\forall \kappa \Big[\kappa \geq \omega \rightarrow \kappa \times \kappa \sim \kappa \Big]$$

Prueba: Sea κ un cardinal transfinito. Supongamos inductivamente que,

$$\forall \lambda < \kappa \Big[\lambda \geq \omega \rightarrow \lambda \times \lambda \sim \lambda \Big]$$

Si ponemos que $a = \kappa \times \kappa$ y $r = \lhd_\kappa$, resulta que $\langle a, r \rangle \in COBO$. Además $\langle a, r \rangle$ cumple con las hipótesis del lema anterior.

i). $\kappa \leq | a |$: Pues $\kappa \precsim \kappa \times \kappa = a$. Y

ii). $\forall x \in a$, $| x_r | < \kappa$: Sea $x \in a$. Hay pues, $\alpha, \beta \in \kappa$ tales que $x = \langle \alpha, \beta \rangle$ y sea $\delta = (\alpha \cup \beta)^+$. Puesto que $\kappa \in LIM$, resulta que $\delta < \kappa$ y por el **2**) del **Lema₁**, tenemos que $x_r \subseteq \delta \times \delta$. Respecto al tamaño de δ, tenemos dos casos:

Si $\delta < \omega$, entonces δ es finito y por tanto $\delta \times \delta$ también. Así,

$$| x_r | \leq | \delta \times \delta | < \omega \leq \kappa$$

Supongamos ahora que $\delta \geq \omega$ y sea $\mu = | \delta |$. Tenemos que,

$$\omega \leq \mu = | \delta | \leq \delta < \kappa \quad \text{y} \quad \delta \times \delta \sim \mu \times \mu$$

Por nuestra hipótesis inductiva, $\mu \times \mu \sim \mu$. Con esto tenemos:

$$| x_r | \leq | \delta \times \delta | = | \mu \times \mu | = | \mu | = \mu < \kappa$$

Concluimos, gracias al **Lema₂**, que $\langle \kappa \times \kappa, \lhd_\kappa \rangle \simeq \langle \kappa, \in_\kappa \rangle$ y de aqui que $\kappa \times \kappa \sim \kappa$. †

De la prueba extraemos un resultado muy significativo.

Corolario. Si $\kappa \in CAR$, entonces $\langle \kappa \times \kappa, \lhd_\kappa \rangle \simeq \langle \kappa, \in_\kappa \rangle$.

Con estos resultados a la mano, podemos regresar a la suma y al producto entre cardinales.

Proposición$_7$.

1. Para $\kappa \in CAR$, se tiene que:
   a). $\kappa + \kappa = \kappa$
   b). $\kappa \cdot \kappa = \kappa$
2. $\forall \alpha \left[\alpha \geq \omega \rightarrow \alpha \times \alpha \sim \alpha \right]$

Prueba:

1. Supongamos que $\kappa \geq \omega$. Así,

$$\kappa \underset{0 \leq \kappa}{\leq} \kappa + \kappa \underset{\textbf{Prop}_6}{\leq} \kappa \cdot \kappa = \left| \kappa \times \kappa \right| \underset{\textbf{Lem}_3}{=} \left| \kappa \right| = \kappa$$

2. Supongamos que $\alpha \geq \omega$. Así,

$$\left| \alpha \times \alpha \right| \underset{\textbf{Prop}_0}{=} \left| \alpha \right| \cdot \left| \alpha \right| \underset{|\alpha| \geq \omega}{=} \left| \alpha \right|$$ †

Proposición$_8$. Sean $\kappa \leq \lambda$ y $\lambda \geq \omega$. Así:

1. $\kappa + \lambda = \lambda$, y
2. $\kappa \neq 0 \rightarrow \kappa \cdot \lambda = \lambda$.

Prueba:

1. $\lambda \underset{0 \leq \kappa}{\leq} \kappa + \lambda \underset{\kappa \leq \lambda}{\leq} \lambda + \lambda \underset{\lambda \geq \omega}{=} \lambda$.
2. $\lambda \underset{1 \leq \kappa}{\leq} \kappa \cdot \lambda \underset{\kappa \leq \lambda}{\leq} \lambda \cdot \lambda \underset{\lambda \geq \omega}{=} \lambda$. †

Ejemplos:

a). $n < \omega \rightarrow \aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$.

b). $0 \neq n < \omega \rightarrow \aleph_\alpha \cdot n = \aleph_\alpha$.

c). $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

d). $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$.

e). $\aleph_{28} + \aleph_\omega = \aleph_{35} \cdot \aleph_\omega = \aleph_\omega$.

f). $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\alpha \cup \beta}$.