Exponenciación

Pasemos ahora a definir la exponenciación entre cardinales, κ^{λ}.

En primer lugar, quisiéramos que esta definición, al restringirla a los cardinales finitos, coinsidiera con la de los números naturales. Una definición por recursión (general, por supuesto) solo llegaríamos a obtener la exponenciación ordinal y ésta no refleja lo que queremos.

Tomemos otro camino, pensemos que queremos calcular κ^{λ}, ésta es en cierta manera una forma de calcular $\kappa \cdot \kappa \cdot \ \ldots \ \cdot \kappa \cdot \ \ldots$ y este producto λ–veces. Esto tiene tantos elementos como tiene $\kappa \times \kappa \times \ \ldots \ \times \kappa \times \ \ldots$ (λ–veces). Es decir tomamos el producto cartesiano generalizado de κ consigo mismo λ–veces. Veamos este producto,

$$\underset{\alpha\in\lambda}{\times} \kappa = \left\{ f : \lambda \to \bigcup_{\alpha\in\lambda} \kappa \ / \ \forall\alpha \in \lambda \left[f(\alpha) \in \kappa \right] \right\} = \left\{ f \ / \ f : \lambda \to \kappa \right\} = {}^{\lambda}\kappa$$

Así, si queremos una buena definición de exponenciación cardinal deberíamos tener que

$$\kappa^{\lambda} \sim {}^{\lambda}\kappa$$

Pero para ello tendríamos que tener, debido a la arbitrariedad de κ y de λ, que ${}^{\lambda}\kappa \in BO$, pero esto ¡**No lo sabemos**! (?).

De ahora en adelante, trabajaremos con el Axioma de Elección (**AE**), es decir en **ZFC**$^{-}$. Por lo pronto, tenemos que todo conjunto es bien ordenable, $V = BO$.

Definición$_3$. Para $\kappa, \lambda \in card$, se define,

$$\kappa^{\lambda} = \left| \ {}^{\lambda}\kappa \ \right|$$

Ejemplos:

a). $\kappa^0 = 1.$
En particular, $0^0 = 1.$

b). $\lambda \neq 0 \to 0^{\lambda} = 0.$

c). $\kappa^1 = \kappa.$

d). $1^{\kappa} = 1.$

e). $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa.$
Pues, ${}^{2}\kappa \sim \kappa \times \kappa$: a cada $i \in {}^{2}\kappa$, se le puede asociar el par $\langle i(0), i(1) \rangle \in \kappa \times \kappa.$

f). Si $\kappa \geq \omega$, entonces $\kappa^n = \kappa$, para todo $n \in \omega \setminus \{0\}$.

g). La exponenciación cardinal restringida a los finitos, coincide con la correspondiente entre naturales.

h). **i**). $2^{\aleph_0} = \left| {}^{\omega}2 \right| = \left| \wp(\omega) \right| = \left| \mathbb{R} \right|$

ii). $2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$

iii). **H**ipótesis del **C**ontinuo (**HC**): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Proposición$_9$. $\left| {}^{b}a \right| = \left| a \right|^{|b|}$

Prueba: Sean $\kappa,\ \lambda,\ f$ y g tales que $a \underset{f}{\sim} \kappa$ y $b \underset{g}{\sim} \lambda$. Entonces

$$ {}^{b}a \underset{h}{\sim} {}^{\lambda}\kappa $$

donde, para toda $i : b \to a,\ h(i) = \left\{ \left\langle \alpha, f(i(g^{-1}(\alpha))) \right\rangle \ / \ \alpha \in \lambda \right\}$. Es decir, $h = f \circ (i \circ g^{-1})$. †

Proposición$_{10}$.

$$ \kappa \leq \lambda \to \kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu} $$

Prueba: Si $\kappa \leq \lambda$, entonces $\kappa \subseteq \lambda$ y, obviamente, ${}^{\mu}\kappa \subseteq {}^{\mu}\lambda$ y de aquí que ${}^{\mu}\kappa \precsim {}^{\mu}\lambda$. †

Proposición$_{11}$.

$$ \lambda \leq \mu \to \kappa^{\lambda} \leq \kappa^{\mu} $$

Excepto el caso en que, $\kappa = 0,\ \lambda = 0$ y $\mu \neq 0$.

Prueba: Supongamos que $\kappa \neq 0 \neq \lambda$ y que $\lambda \leq \mu$. Tenemos que ${}^{\lambda}\kappa \precsim {}^{\mu}\kappa$, pues podemos asociar a cada $i \in {}^{\lambda}\kappa$, le asociamos $i' = i \cup \left\{ \langle \alpha, 0 \rangle \ / \ \alpha \in \mu \setminus \lambda \right\} \in {}^{\mu}\kappa$. †

Proposición$_{12}$.

1. $\lambda > 0 \to \kappa \leq \kappa^{\lambda}$
2. $\kappa > 1 \to \lambda \leq \kappa^{\lambda}$
3. $\kappa_1 < \kappa_2 \ \&\ \lambda_1 < \lambda_2 \to \kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$

Prueba: **Ejercicio**. †

Proposición$_{13}$.

$$ \kappa^{\lambda} \bullet \kappa^{\mu} = \kappa^{\lambda + \mu} $$

Prueba: Sean l y m tales que $l \cap m = \emptyset,\ \left| l \right| = \lambda$ y $\left| m \right| = \mu$. Así,

$$^{l \cup m}\kappa \underset{h}{\sim} {}^{l}\kappa \times {}^{m}\kappa$$

donde, para cada $i : l \cup m \to \kappa,$ se tiene que:

$$h(i) = \left\langle i \restriction l \;,\; i \restriction m \right\rangle \in {}^{l}\kappa \times {}^{m}\kappa$$

†

Proposición$_{14}$.

$$(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$$

Prueba: Tenemos que:

$$^{\mu}({}^{\lambda}\kappa) \underset{h}{\sim} {}^{\mu \times \lambda}\kappa$$

donde, para cada $i : \mu \to {}^{\lambda}\kappa,$ se tiene:

$$h(i) = j \leftrightarrow \begin{cases} j : \mu \times \lambda \to \kappa \\ \& \\ \forall \langle \alpha, \beta \rangle \in \mu \times \lambda \left[j(\alpha, \beta) = (i(\alpha))(\beta) \right] \end{cases}$$

†

Proposición$_{15}$.

$$\kappa < \kappa^{+} \leq 2^{k}$$

Prueba: Sabemos que $\kappa \prec \wp(\kappa) \sim {}^{\kappa}2,$ por lo que $\kappa < 2^{k}.$ El resto se sigue de que $\kappa^{+} = \bigcap \left\{ \lambda \;/\; \lambda > \kappa \right\}.$ †

Proposición$_{16}$.

$$2 \leq \kappa \leq \lambda \;\&\; \lambda \geq \omega \;\to\; 2^{\lambda} = \kappa^{\lambda} = \lambda^{\lambda} = (\lambda^{+})^{\lambda}$$

Prueba: Puesto que

$$2 \leq \kappa \leq \lambda < \lambda^{+} \leq 2^{\lambda}$$

por la **Proposición**$_{11}$,

$$2^{\lambda} \leq \kappa^{\lambda} \leq \lambda^{\lambda} \leq (\lambda^{+})^{\lambda} \leq (2^{\lambda})^{\lambda} = 2^{\lambda \cdot \lambda} \underset{\lambda \geq \omega}{=} 2^{\lambda}$$

†

Ejemplos:

1. $2^{\aleph_{35}} = (\aleph_{28})^{\aleph_{35}} = (\aleph_{35})^{\aleph_{35}} = (\aleph_{36})^{\aleph_{35}}$

2. $2^{\aleph_{\omega}} = (\aleph_{28})^{\aleph_{\omega}} = (\aleph_{35})^{\aleph_{\omega}} = (\aleph_{\omega})^{\aleph_{\omega}} = (\aleph_{\omega+1})^{\aleph_{\omega}}$

¿ Qué sabemos de $|\mathbb{R}|$?

Puesto que:

$$|\mathbb{R}| = |\wp(\omega)| = |{}^{\omega}2| = 2^{\aleph_0}$$

La **Proposición**$_{15}$, nos afirma que

$$\kappa < \kappa^+ \leq 2^k$$

Por lo que:

$$\aleph_0 < \aleph_1 \leq 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

Por lo tanto, el $|\mathbb{R}|$ puede ser $\aleph_1$ o $\aleph_2$ o ..., pero ¿Cuál de ellos?

La *Hipótesis del continuo* (**HC**), afirma:

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Esto se puede generalizar; ya que

$$\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$$

Tenemos la llamada *Hipótesis Generalizada del continuo* (**HGC**) la cual afirma:

$$\forall\alpha \left[2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \right]$$

Breviario cultural.

CANTOR, **J**. (n. 3 de marzo de 1845 - m. 6 de enero de 1918):

- 1878 (1a. Formulación)

"Entre las variedades lineales infinitas **no** se encuentran más que dos potencias."
(A saber la potencia de $\mathbb{Z}^+$ y la potencia de $\mathbb{R}$).

En particular no hay $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbb{Z}^+ \prec A \prec \mathbb{R}$$

O, equivalentemente:

para $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \in INF$, se tiene que $A \sim \mathbb{Z}^+$ o $A \sim \mathbb{R}$

O equivalentemente,

Si $A \subseteq \mathbb{R}$, A incontable, entonces $A \sim \mathbb{R}$

- 1883: $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ (en otra terminología)

- 1887-1890: Habiendo probado que $\wp(\mathbb{Z}^+) \sim \mathbb{R}$ y $\wp(A) \sim {}^{A}\{0,1\}$ o $\overline{\overline{\wp(A)}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$, reformula la **HC** de la siguiente manera,

$$\neg\exists A\left[\mathbb{Z}^{+} \prec A \prec \wp(\mathbb{Z}^{+})\right]$$

O equivalentemente (con la notación de los $\aleph'$s dada hasta 1895-1897)

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Hausdorff (n. 8 de noviembre de 1868 - m. 26 de enero de 1942)

- (1904): $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ (**HGC**)

Hay que mencionar que David Hilbert propuso una lista de 23 problemas sin resolver en el Congreso Internacional de Matemáticos de París en 1900. El primer problema de ellos fué contestar a la pregunta, hecha por Cantor:

Para $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \in INF$, se tiene que $A \sim \mathbb{Z}^{+}$ o $A \sim \mathbb{R}$

En tal caso, se tendría que

$$\left|\,\mathbb{R}\,\right| = \aleph_1$$

Sugiere Hilbert que una posibilidad para contestarla era dar una buena ordenación a los números Reales, pues entonces se sabría que ordinal le correspondería. Para ello Zermelo, en 1904, responde con el resultado: “Todo conjunto es Bien Ordenable”, desatando la discusión sobre el uso del ahora llamado “Axioma de Elección”

Las preguntas que surgen inmediatamente son: ¿Se puede demostrar la **HC**? ¿Es consistente suponerla? La respuesta fué:

GÖDEL, **K**. (**CHE**, n. 28 de abril de 1906 - m. 14 de enero de 1978)

En 1938 con una técnica llamada, *Modelos Internos* (de la Teoría de Conjuntos):

- $\text{CON}(\textbf{ZFC}) \Rightarrow \text{CON}(\textbf{ZFC} + \textbf{HC})$, equivalentemente,

  $$\text{CON}(\textbf{ZFC}) \Rightarrow \textbf{ZFC} \nvdash \neg\textbf{HC}$$

- $\text{CON}(\textbf{ZFC}) \Rightarrow \text{CON}(\textbf{ZFC} + \textbf{HGC})$, equivalentemente,

  $$\text{CON}(\textbf{ZFC}) \Rightarrow \textbf{ZFC} \nvdash \neg\textbf{HGC}$$

Valga decir que también probó:

- $\text{CON}(\textbf{ZF}) \Rightarrow \text{CON}(\textbf{ZFC})$, equivalentemente,

  $$\text{CON}(\textbf{ZF}) \Rightarrow \textbf{ZFC} \nvdash \neg\textbf{AE}$$

La otra parte:

COHEN, **P**. (**USA**, n. 2 de abril, 1934 – m. 23 de marzo, 2007)

En 1963 utilizando una nueva técnica, Forcing, prueba,

- CON(**ZFC**) $\Rightarrow$ CON(**ZFC** $+ \neg$ **HC**), equivalentemente,

  CON(**ZFC**) $\Rightarrow$ **ZFC** $\nvdash$ **HC**
- CON(**ZFC**) $\Rightarrow$ CON(**ZFC** $+ \neg$ **HGC**), equivalentemente,

  CON(**ZFC**) $\Rightarrow$ **ZFC** $\nvdash$ **HGC**

También probó que,

- CON(**ZF**) $\Rightarrow$ CON(**ZF** $+ \neg$ **AE**), equivalentemente,

  CON(**ZF**) $\Rightarrow$ **ZF** $\nvdash$ **AE**

De Hecho, con la técnica de Forcing, se tiene que:

Proposición. Si $\sigma \in \mathcal{L}^0_{TC}$ donde,

1. $\sigma \rightleftharpoons (2^{\aleph_0} = \aleph_1)\ \&\ (2^{\aleph_1} = \aleph_3)$.
2. $\sigma \rightleftharpoons (2^{\aleph_0} = \aleph_2)\ \&\ (2^{\aleph_2} = \aleph_3)$.
3. $\sigma \rightleftharpoons (2^{\aleph_0} = \aleph_{28})\ \&\ (2^{\aleph_1} = \aleph_{35})$.
4. $\sigma \rightleftharpoons (2^{\aleph_0} = \aleph_{35})\ \&\ (2^{\aleph_2} = \aleph_{\omega+28})$.

entonces

$$\text{CON}(\textbf{ZFC}) \Rightarrow \text{CON}(\textbf{ZFC} + \sigma)$$

†

Veremos más adelante que:

$$\textbf{ZFC} \vdash 2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$$

Por lo pronto, lo que sabemos de la exponenciación cardinal es el resultado enunciado por la **Proposición**$_{16}$, la cual nos dice:

Si $2 \leq \kappa \leq \lambda$ y $\lambda \geq \omega$, entonces:

$$2^\lambda = \kappa^\lambda = \lambda^\lambda = (\lambda^+)^\lambda$$

El cual se puede resumir en,

Si $2 \leq \kappa \leq \lambda^+$, con $\lambda \geq \omega$, entonces $\kappa^\lambda = 2^\lambda$