

Funcionales Normales

En lo que sigue, sea

$$F : OR \rightarrow OR$$

Definición₁. Un ordinal α es un *Punto Fijo de F* syss $F(\alpha) = \alpha$.

¿Bajo qué condiciones, una funcional tiene puntos fijos? Recordar:

- a) F es monótona syss $\forall \alpha, \beta \left[\alpha < \beta \rightarrow F(\alpha) < F(\beta) \right]$.
- b) Si F es monótona, entonces $\forall \alpha \left[\alpha \leq F(\alpha) \right]$.

Una funcional monótona es buen candidato a tener puntos fijos. Un ejemplo “exagerado” es la identidad, Id_{OR} , es monótona y cada ordinal es un punto fijo. Sin embargo, la monotonía no es suficiente, p.e. la sucesor (para OR), $_+ \upharpoonright OR$, es monótona pero no tiene un solo punto fijo.

Observemos que si $\gamma \in LIM$ y F es monótona, para todo $\xi < \gamma$ se tiene que $F(\xi) < F(\gamma)$ por lo que,

$$\bigcup \{ F(\xi) \mid \xi < \gamma \} \leq F(\gamma) \quad (*)$$

Un resultado que nos ayudará más adelante,

Proposición₁.

- 1. Si F es monótona, entonces $\forall \alpha \left[F(\alpha) < F(\alpha^+) \right]$.
- 2. Si F es tal que $\forall \alpha \left[F(\alpha) < F(\alpha^+) \right]$ y cumple con (*), entonces F es monótona.

Prueba:

- 1. Inmediata de la definición de monotonía.
- 2. Sean $\alpha \in OR$ y

$$\varphi(\beta) \Leftrightarrow \left[\alpha < \beta \rightarrow F(\alpha) < F(\beta) \right]$$

Basta probar que $\forall \beta \varphi(\beta)$ y esto lo haremos por inducción para OR .

$\varphi(0)$] Este caso es trivialmente cierto.

$\forall \beta \left[\varphi(\beta) \rightarrow \varphi(\beta^+) \right]$] Sea $\beta \in OR$. Supongamos que $\varphi(\beta)$ y que $\alpha < \beta^+$. De esto

último tenemos, $\alpha \leq \beta$. De la H.I. y de que F es funcional concluimos que $F(\alpha) \leq F(\beta)$. Finalmente, usando la primera hipótesis inicial, $F(\alpha) \leq F(\beta) < F(\beta^+)$.

$\forall \beta \in LIM [(\forall \xi < \beta \varphi(\xi)) \rightarrow \varphi(\beta)]$ Sea $\beta \in LIM$ y supongamos, inductivamente, que $\forall \xi < \beta \varphi(\xi)$. Ahora supongamos también que $\alpha < \beta$. Puesto que $\beta \in LIM$, tenemos que $\alpha < \alpha^+ < \beta$. Con todo esto obtenemos,

$$F(\alpha) \underset{\text{H.I.}}{<} F(\alpha^+) \leq \bigcup \{ F(\gamma) \mid \gamma < \beta \} \underset{(*)}{\leq} F(\beta)$$

†

Definición₂. La funcional F es *Continua* syss

$$\forall \beta \in LIM [F(\beta) = \bigcup \{ F(\xi) \mid \xi < \beta \}]$$

Si la funcional F es monótona basta pedir, gracias a (*), que para ordinales límites γ se tenga

$$F(\gamma) \leq \bigcup \{ F(\xi) \mid \xi < \gamma \}$$

para tener la continuidad de F .

Ejemplos:

- 1) $_+ \uparrow OR$ es monótona, pero no es continua.
- 2) Una funcional constante, p.e. $F(\alpha) = \omega$, es continua, no es monótona y tiene a ω como único punto fijo.
- 3) La funcional suma ordinal por un ordinal dado, \sum_γ , es monótona y continua:
 - a) $\alpha < \beta \rightarrow \sum_\gamma(\alpha) < \sum_\gamma(\beta)$ y
 - b) $\gamma \in LIM \rightarrow \sum_\gamma(\gamma) = \bigcup \{ \sum_\gamma(\xi) \mid \xi < \gamma \}$.
- 4) La funcional aleph, \aleph , es monótona y continua.

Definición₃. (**VEBLEN, 1908**). Diremos que F es una (*Funcional*) *Normal* syss F es monótona y continua. Es decir,

1. $\forall \alpha, \beta [\alpha < \beta \rightarrow F(\alpha) < F(\beta)]$ y
2. $\forall \gamma \in LIM [F(\gamma) = \bigcup \{ F(\xi) \mid \xi < \gamma \}]$

Proposición₂. Una funcional normal, F , tiene puntos fijos arbitrariamente lejanos. Es decir

$$\forall \alpha \exists \beta \left[\alpha \leq \beta \ \& \ F(\beta) = \beta \right]$$

Prueba: Sea α un ordinal arbitrario. Si fuera el caso que $F(\alpha) = \alpha$, basta tomar a $\beta = \alpha$. Supongamos pues, que no es el caso.

Definimos la función g , por recursión sobre ω , como sigue,

$$g : \omega \rightarrow OR$$

- I. $g(0) = \alpha$
- II. $\forall n \in \omega, g(n^+) = F(g(n))$

Sea $\beta = \bigcup \{g(n) \mid n \in \omega\}$. Afirmamos que $F(\beta) = \beta$.

Antes de pasar a probarlo, veamos algunas propiedades que se tienen gracias a las definiciones anteriores,

1. $\alpha < F(\alpha)$. Pues, por la monotonía de F se tiene que $\alpha \leq F(\alpha)$ y de nuestra suposición, $F(\alpha) \neq \alpha$.
2. La función g es monótona (**TAREA**) y por tanto $\beta \notin \{g(n) \mid n \in \omega\}$.
3. $\alpha = g(0) < \underset{p \in \omega}{g(p^+)} < \bigcup \{g(n) \mid n \in \omega\} = \beta \leq F(\beta)$.
4. $\beta \in LIM$. Pues si $\gamma \in \beta = \bigcup \{g(n) \mid n \in \omega\}$, hay un $n_0 \in \omega$ tal que $\gamma \in g(n_0)$; pero entonces

$$\gamma < \gamma^+ \leq g(n_0) < \beta$$

y resulta que β es cerrado bajo sucesores.

Para ver que β es punto fijo de F , solo nos falta ver que $F(\beta) \leq \beta$.

Sea $\gamma \in F(\beta)$. Puesto que F es continua, hay un $\xi_0 < \beta$ tal, que $\gamma < F(\xi_0)$. Ahora bien, dada la definición de β , para este ξ_0 hay un $n_0 \in \omega$ con la propiedad de que $\xi_0 < g(n_0)$. Con esto tenemos la siguiente inecuación,

$$\gamma < F(\xi_0) < F(g(n_0)) = g(n_0^+) < \beta$$

†

Esta prueba es eficiente en el sentido de que nos proporciona el primer punto fijo de F que es mayor o igual a α (**TAREA**).

Proposición₃. Sean F una Funcional Normal y a un conjunto no-vacío de Ordinales. Así,

$$F\left(\bigcup a\right) = \bigcup \left\{F(\xi) \mid \xi \in a\right\}$$

Prueba: TAREA.

†

Usando el resultado anterior, podemos dar otra prueba de que $F(\beta) = \beta$, en la **Proposición₂**.

TAREA

1. Considera la prueba de la **Proposición₂**. Prueba:
 - a. La función g es monótona.
Sug. usar inducción y usar que $\alpha < F(\alpha)$ y que F es monótona.
 - b. β es el primer punto fijo de F que es $\geq \alpha$.
2. Prueba la **Proposición₃**.
Sug. Si $\beta = \bigcup a$, considerar el caso en que $\beta \in a$ y en el que $\beta \notin a$.
3. Usando **3.** da otra prueba de la **Proposición₂**.