Aritmética Transfinita de Cardinales

Recordemos que aquí estamos trabajando en **ZFC**$^{-}$.

$\sum$UMAS INFINITAS.

Quisieramos:

$$1 + 1 + 1 + \ \ldots \ = \aleph_0$$

Así como también:

$$\kappa + \kappa + \kappa + \ \ldots \ = \kappa \cdot \lambda$$

Definición$_1$. Sea $I \in V$ y $\left\{\kappa_i \ / \ i \in I\right\} \subseteq card$. Así,

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \ \bigcup_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\}) \ \right|$$

Proposición$_0$. Sea $I \in V$, y sean $\left\{a_i \ / \ i \in I\right\}$ y $\left\{b_i \ / \ i \in I\right\}$ dos familias de conjuntos ajenos dos a dos y tales que $\forall i \in I$, $| \ a_i \ | = | \ b_i \ |$. Entonces

$$\left| \ \bigcup_{i \in I} a_i \ \right| = \left| \ \bigcup_{i \in I} b_i \ \right| \quad \text{y} \quad \left| \ \bigcup_{i \in I} a_i \ \right| = \sum_{i \in I} | \ a_i \ |$$

Prueba: Para cada $i \in I$, sea (**AE**) f_i tal que $a_i \underset{f_i}{\sim} b_i$. Y sea $f = \bigcup_{i \in I} f_i$. Así,

$$\bigcup_{i \in I} a_i \underset{f}{\sim} \bigcup_{i \in I} b_i$$

La otra parte es inmediata de esto y de la definición de suma. †

Veamos algunas propiedades:

Proposición$_1$. Leyes asociativas y conmutativas para $\sum$:

Sean I, J, $\left\{I_j \ / \ j \in J\right\} \in V$, tales que $\left\{I_j \ / \ j \in J\right\}$ es una partición de I, es decir: $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ con $\left\{I_j \ / \ j \in J\right\}$ una familia de conjuntos ajenos dos a dos y $\forall j \in J$ $[I_j \neq \emptyset]$. Así,

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} \kappa_i \right)$$

Prueba: Inmediata de las propiedades de la unión. †

Proposición$_2$. Si $\forall i \in I,\ \kappa_i = \kappa$, entonces

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I} \kappa = \kappa \cdot \left| \ I \ \right|$$

Prueba: Supongamos que $\left| \ I \ \right| = \lambda$. Así,

$$\sum_{i\in I} \kappa = \left| \bigcup_{i\in I} (\kappa \times \{i\}) \right| = \left| \bigcup_{\alpha\in\lambda} (\kappa \times \{\alpha\}) \right| = \left| \kappa \times \lambda \right| = \kappa \cdot \lambda$$

†

Proposición$_3$.

1. $\forall i \in I,\ \left[\kappa_i \le \lambda_i\right] \to \sum_{i\in I} \kappa_i \le \sum_{i\in I} \lambda_i.$
2. $\forall i \in I,\ \left[\kappa_i < \lambda_i\right] \to \sum_{i\in I} \kappa_i \le \sum_{i\in I} \lambda_i.$

Prueba: Ejercicio. †

Ejemplos:

1. $\sum_{n\in\omega} 1 = 1 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
2. $1 + 2 + 3 + \ \ldots \ + n + \ \ldots \ = \aleph_0$, con $n \in \omega$. Pues:
$$\aleph_0 = \sum_{n\in\omega} 1 \underset{1\le n}{\le} \sum_{n\in\omega} n \underset{n\le\aleph_0}{\le} \sum_{n\in\omega} \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \left| \ \omega \ \right| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$
3. $\sum_{n\in\omega} \aleph_0 = \aleph_0$
4. $\sum_{n\in\omega} \aleph_n = \aleph_\omega$

$\le\,]$ Como para cada $n \in \omega$ se tiene que $\aleph_n \le \aleph_\omega$, entonces

$$\sum_{n\in\omega} \aleph_n \le \sum_{n\in\omega} \aleph_\omega = \aleph_\omega \cdot \aleph_0 = \aleph_\omega$$

$\ge\,]$ Como para cada $p \in \omega$ se tiene que $\aleph_p \le \sum_{n\in\omega} \aleph_n$, entonces $\sum_{n\in\omega} \aleph_n$ es cota superior de $\left\{\aleph_p \ / \ p \in \omega\right\}$, por tanto tenemos que,

$$\aleph_\omega = sup\left\{\aleph_p \ / \ p \in \omega\right\} \leq \sum_{n\in\omega} \aleph_n$$

Proposición$_4$. Sea $\lambda \geq \aleph_0$ y sean $\kappa_\xi \in card \setminus \{0\}$ para $\xi < \lambda$. Así,

$$\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \lambda \cdot sup\left\{\kappa_\xi \ / \ \xi < \lambda\right\}$$

Prueba: Sea $\kappa = sup\left\{\kappa_\xi \ / \ \xi < \lambda\right\}$. Demostremos que: $\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \lambda \cdot \kappa$

$\leq]$ Tenemos que $\forall \xi < \lambda,\ \kappa_\xi \leq \kappa$. Así,

$$\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \leq \sum_{\xi<\lambda} \kappa = \lambda \cdot \kappa$$

$\geq]$ Por un lado, tenemos que,

$$\lambda = \sum_{\xi<\lambda} 1 \underset{1\leq\kappa_\xi}{\leq} \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$$

Por otro lado, como $\kappa_\beta \leq \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$ para cada $\beta < \lambda$, resulta que $\sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$ es cota superior de $\left\{\kappa_\xi \ / \ \xi < \lambda\right\}$. Pero κ es el supremo de dicho conjunto, por tanto

$$\kappa \leq \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$$

Finalmente, $\lambda \cdot \kappa = max\left\{\lambda, \kappa\right\} \leq \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$. †

Observación: Si $\left\{\kappa_i \ / \ i \in I\right\} \subseteq card$, con $\aleph_0 \leq |I| \leq sup\left\{\kappa_i \ / \ i \in I\right\}$, entonces

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = sup\left\{\kappa_i \ / \ i \in I\right\}$$

Por ejemplo:

$$\sum_{n\in\omega} \aleph_n = sup\left\{\aleph_n \ / \ n \in \omega\right\} = \aleph_\omega$$