$\prod$RODUCTOS INFINITOS.

Recordemos la definición de producto cartesiano generalizado:

Sean $I \in V$ y $\left\{ a_i \ / \ i \in I \right\} \in V$. Así,

$$\mathop{\times}_{i \in I} a_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} a_i \ / \ \forall i \in I, f(i) \in a_i \right\}$$

Pasemos ahora al producto generalizado de cardinales.

Definición$_2$. Sea $I \in V$ y $\left\{ \kappa_i \ / \ i \in I \right\} \subseteq card$. Así,

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \left| \mathop{\times}_{i \in I} \kappa_i \right|$$

Proposición$_0$. Sea $I \in V$, y sean $\left\{ a_i \ / \ i \in I \right\}$ y $\left\{ b_i \ / \ i \in I \right\}$ dos familias de conjuntos tales que $\forall i \in I, \ |a_i| = |b_i|$. Entonces,

$$\left| \mathop{\times}_{i \in I} a_i \right| = \left| \mathop{\times}_{i \in I} b_i \right| \qquad \text{y} \qquad \left| \mathop{\times}_{i \in I} a_i \right| = \prod_{i \in I} |a_i|$$

Prueba: Ejercicio. †

Proposición$_1$. $\prod_{i \in I} \kappa_i = 0 \leftrightarrow \exists i \in I, \ \kappa_i = 0.$

Prueba: Ejercicio. †

Proposición$_2$. Leyes asociativas y conmutativas para $\prod$:
Sean $I, J, \left\{ I_j \ / \ j \in J \right\} \in V$, tales que $\left\{ I_j \ / \ j \in J \right\}$ es una partición de I. Así,

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \prod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I_j} \kappa_i \right)$$

Prueba: Ejercicio. †

Proposición$_3$. Si $\forall \alpha < \lambda, \ \kappa_\alpha = \kappa$, entonces

$$\prod_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha = \prod_{\alpha < \lambda} \kappa = \kappa^\lambda$$

Prueba:

$$\prod_{\alpha<\lambda} \kappa = \left| \bigtimes_{\alpha<\lambda} \kappa \right| = \left| \left\{ f \ / \ f : \lambda \to \kappa \right\} \right| = \left| \ {}^{\lambda}\kappa \ \right| = \kappa^{\lambda}$$

†

Ejemplo: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots = \prod_{n<\omega} 2 = 2^{\aleph_0}$.

Proposición₄. $\forall i \in I, \left[\kappa_i \leq \lambda_i \right] \to \prod_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i$.

Prueba: Ejercicio. †

Proposición₅. $\left(\prod_{i\in I} \kappa_i \right)^{\lambda} = \prod_{i\in I} (\kappa_i)^{\lambda}$.

Prueba: Ejercicio. †

Proposición₆. $\prod_{i\in I} (\kappa^{\lambda_i}) = \kappa^{\left(\sum_{i\in I} \lambda_i \right)}$.

Prueba: Ejercicio. †

Ejemplos:

1. $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot \ldots = \prod_{0<n<\omega} n = 2^{\aleph_0}$:

$$2^{\aleph_0} = \prod_{n<\omega} 2 = \prod_{1<n<\omega} 2 \underset{2 \leq n}{\leq} \prod_{1<n<\omega} n = \prod_{0<n<\omega} n \leq \prod_{0<n<\omega} \aleph_0 = \prod_{n<\omega} \aleph_0 = (\aleph_0)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

2. $\prod_{n<\omega} \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$

3. $1^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} \cdot \ldots \cdot n^{\aleph_0} \cdot \ldots = \prod_{0<n<\omega} (n^{\aleph_0}) = 2^{\aleph_0}$.

$$\prod_{0<n<\omega} (n^{\aleph_0}) = \prod_{0<n<\omega} \aleph_0 = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

O usando la **Proposición₅** :

$$\prod_{0<n<\omega} (n^{\aleph_0}) = \left(\prod_{0<n<\omega} n \right)^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

4. $(\aleph_0)^1 \cdot (\aleph_0)^2 \cdot \ldots \cdot (\aleph_0)^n \cdot \ldots = \prod_{n\in\omega} (\aleph_0^n) = \aleph_0^{\left(\sum_{n\in\omega} n \right)} = (\aleph_0)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

5. $\prod_{\alpha<\omega_1} |\alpha| = \ ?$

Proposición$_7$. Sean $\lambda \geq \aleph_0$ y $\left\langle \kappa_\alpha \ / \ \alpha < \lambda \right\rangle$ una λ–sucesión no–decreciente de cardinales distintos de cero. Así,

$$\prod_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \left(sup\left\{ \kappa_\alpha \ / \ \alpha < \lambda \right\} \right)^\lambda$$

Prueba: Sea $\kappa = sup\left\{ \kappa_\alpha \ / \ \alpha < \lambda \right\}$. Hagamos la prueba por doble contención.

$\leq \Big]$ Como $\forall \alpha < \lambda,\ \kappa_\alpha \leq \kappa$, tenemos

$$\prod_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha \leq \prod_{\alpha<\lambda} \kappa = \kappa^\lambda$$

$\geq \Big]$ Puesto que λ es infinito, lo podemos descomponer en λ conjuntos, ajenos dos a dos, cada uno de cardinal λ. Sea pues, $\left\{ I_\beta \ / \ \beta < \lambda \right\}$ una familia de conjuntos ajenos dos a dos, tales que $\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} I_\beta$ y para cada $\beta < \lambda$ se tiene que $|I_\beta| = \lambda$. Con esto tenemos,

$$\prod_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \prod_{\beta<\lambda} \left(\prod_{\alpha \in I_\beta} \kappa_\alpha \right)$$

Para lograr nustro objetivo, basta probar que

$$\prod_{\beta<\lambda} \kappa \leq \prod_{\beta<\lambda} \left(\prod_{\alpha \in I_\beta} \kappa_\alpha \right)$$

y para ello, gracias a la **Proposición$_4$**, es suficiente ver que para cada $\beta < \lambda$,

$$\kappa \leq \prod_{\alpha \in I_\beta} \kappa_\alpha$$

Sea pues $\beta < \lambda$. Ahora, veamos que

$$\kappa \leq sup\left\{ \kappa_\alpha \ / \ \alpha \in I_\beta \right\}$$

(de hecho son iguales, **TAREA**). Dada la definición de κ, tenemos que ver que para cada $\alpha < \lambda$ hay un $\gamma \in I_\beta$ tal, que $\kappa_\alpha \leq \kappa_\gamma$. Sea pues $\alpha_0 < \lambda$; tiene que haber un $\gamma_0 \in I_\beta$ tal que $\alpha_0 \leq \gamma_0$; pues en caso contrario, $I_\beta \subseteq \alpha_0$ y tendríamos que $|I_\beta| \leq |\alpha_0| \leq \alpha_0 < \lambda$, lo cual contradice nuestras suposiciones. Ahora bien, por ser no–decreciente, $\kappa_{\alpha_0} \leq \kappa_{\gamma_0}$.

Finalmente, puesto que $\forall \alpha < \lambda,\ \kappa_\alpha \neq \emptyset$, tenemos que $\prod_{\alpha \in I_\beta} \kappa_\alpha \neq \emptyset$ y de aqui que $\forall \alpha \in I_\beta,\ \kappa_\alpha \leq \prod_{\alpha \in I_\beta} \kappa_\alpha$. Así,

$$\kappa \leq sup\left\{\kappa_\alpha \ / \ \alpha \in I_\beta\right\} \leq \prod_{\alpha \in I_\beta} \kappa_\alpha$$

†

Proposición$_8$. (Teorema de König).

$$\forall i \in I\left[\kappa_i < \lambda_i\right] \to \sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

Prueba: Supongamos, s.p.g., que $\left\{a_i \ / \ i \in I\right\}$ y $\left\{b_i \ / \ i \in I\right\}$ son dos familias de conjuntos tales que:

a). Para cada $i \in I$ se tiene que, $|a_i| = \kappa_i < \lambda_i = |b_i|$,

b). Para cada $i \in I$, $a_i \subsetneq b_i$ y

c). Para $i, j \in I$, si $i \neq j$, entonces $a_i \cap a_j = \emptyset$.

Veamos que:

$$\bigcup_{i \in I} a_i \prec \bigtimes_{i \in I} b_i$$

$\precsim\big]$ Por **b**) y con ayuda del **AE**, elegimos para cada $i \in I$ un $u_i \in b_i \setminus a_i$. Obsérvese que si para toda $i \in I$, ponemos $u(i) = u_i$, tenemos que $u \in \bigtimes_{i \in I} b_i$.

Definimos:

$$f: \bigcup_{i \in I} a_i \to \bigtimes_{i \in I} b_i$$

como sigue: Si $x \in \bigcup_{i \in I} a_i$, entonces $f(x) \in \bigtimes_{i \in I} b_i$ tal que: para toda $j \in I$,

$$f(x)(j) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in a_j \\ \text{o} & \\ u_j & \text{si} \quad x \notin a_j \end{cases}$$

Así, f está bien definida y es inyectiva:

i). Por **c**), f está bien definida.

ii). Sean $x,y \in \bigcup_{i \in I} a_i$ con $x \neq y$. Tenemos dos casos:

•) Si $x,y \in a_i$ para algún $i \in I$, entonces $f(x)(i) = x \neq y = f(y)(i)$. Y

• •) Si $x \in a_i$ y $y \in a_j$, con $i \neq j$. Aquí, $f(x)(i) = x$ y $f(y)(i) = u_i$ con $x \neq u_i$, pues $x \in a_i$ y $u_i \in b_i \setminus a_i$.

En ambos casos $f(x) \neq f(y)$.

$\nsim\Big]$ Sea

$$g : \bigcup_{i \in I} a_i \to \bigtimes_{i \in I} b_i$$

Basta ver que hay una $f : I \to \bigcup_{i \in I} b_i$ tal que $f \notin IMG(g)$.

Usaremos el proceso de diagonalización (Cantor). Para cada $i \in I$, sea

$$c_i = \left\{ g(x)(i) \ / \ x \in a_i \right\}$$

Tenemos que $c_i \subseteq b_i$, pero $|c_i| \leq |a_i| < |b_i|$, por tanto $c_i \subsetneq b_i$. Así, $\emptyset \neq (b_i \setminus c_i) \subseteq b_i$.

Sea f una función (**AE**) tal que $\forall i \in I, f(i) \in b_i \setminus c_i$. Así, $f \in \bigtimes_{i \in I} b_i$. Pero $f \notin IMG(g)$, pues si $x \in a_i$, entonces $g(x)(i) \in c_i$, mientras $f(i) \notin c_i$. Por tanto $g(x) \neq f$, para toda $x \in \bigcup_{i \in I} a_i$. †

Corolario₈(Cantor). Si $\kappa \geq 1$, entonces $\kappa < 2^{\kappa}$.

Prueba:

$$\kappa = \sum_{\alpha < \kappa} 1 \underset{1<2}{<} \prod_{\alpha < \kappa} 2 = 2^{\kappa}$$

†

Corolario₉. $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Prueba: Pues si suponemos lo contrario, es decir que $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$, tendríamos que

$$\forall n \in \omega,\ \aleph_n < 2^{\aleph_0}$$

y que por el Teorema de Köning,

$$\aleph_\omega = \sum_{n \in \omega} \aleph_n < \prod_{n \in \omega} 2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Lo cual contradice nuestra suposición. †

Otra manera de redactar el caso:

$\precsim$] Para cada $i \in I$ elegimos (**AE**) $d_i \in b_i \setminus a_i$. Como ayuda notacional pongamos: para cada $x \in \bigcup_{i\in I} a_i$ sea $i_x \in I$, tal que $x \in a_{i_x}$ (único, pues son ajenos dos a dos). Definimos,

$$f: \bigcup_{i\in I} a_i \to \bigtimes_{i\in I} b_i$$
$$\forall x \in \bigcup_{i\in I} a_i, \quad f(x) = \langle y_i \rangle_{i\in I}$$

donde:

$$\forall i \in I,\ y_i = \begin{cases} x & \text{si} \quad i = i_x \\ \text{o} & \\ d_i & \text{si} \quad i \neq i_x \end{cases}$$

f es inyectiva, pues si $x, x' \in \bigcup_{i\in I} a_i$ con $x \neq x'$, tenemos que $f(x) = \langle y_i \rangle_{i\in I}$ y $f(x') = \langle y_i' \rangle_{i\in I}$. Tenemos dos casos: Si $i_x = i_{x'} = i^*$, entonces $y_{i^*} = x \neq x' = y_{i^*}'$. Para el caso en que $i_x \neq i_{x'}$, tenemos que $y_{i_x} = x \in a_{i_x}$ y que $y_{i_x}' = d_{i_x} \in b_{i_x} \setminus a_{i_x}$. En ambos casos, $f(x) \neq f(x')$.