EXPONENCIACIÓN CARDINAL

Pasemos ahora a investigar la exponenciación cardinal, ayudandonos con la herramienta de cofinalidad. Aquí estaremos trabajando en **ZFC**$^{-}$.

Sabemos muy poco de la exponenciación cardinal, recordemos. Sean $\kappa, \lambda, \mu \in car$.

1. $\kappa^{\lambda} \underset{\textbf{AE}}{\rightleftharpoons} \left| \ {}^{\lambda}\kappa \ \right| = \left| \left\{ f \ / \ f : \lambda \to \kappa \right\} \right|$.

2. $\kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu} = \kappa^{\lambda+\mu}$.

3. $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

4. $\lambda < \mu \to \kappa^{\lambda} \leq \kappa^{\mu}$.

5. $\lambda < \mu \to \lambda^{\kappa} \leq \mu^{\kappa}$.

6. $\kappa < 2^{\kappa}$. Y por tanto, $\kappa^{+} \leq 2^{\kappa}$.

(Recordar: **HC** $\rightleftharpoons 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y **HGC** $\rightleftharpoons \forall \kappa \geq \omega,\ 2^{\kappa} = \kappa^{+}$.)

7. Si $2 \leq \kappa \leq \lambda$ y $\lambda \geq \omega$, entonces $\kappa^{\lambda} = \lambda^{\lambda} = 2^{\lambda} \left(\underset{\textbf{HGC}}{=} \lambda^{+} \right)$.

8. Si $\lambda \geq \omega$, entonces $(\lambda^{+})^{\lambda} = 2^{\lambda} \left(\underset{\textbf{HGC}}{=} \lambda^{+} \right)$.

Un resultado que es útil para el cálculo de la exponenciación nos lo dá la siguiente,

Proposición$_1$. (Fórmula de Hausdorff)

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha}^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$$

Prueba: Sean $\kappa,\ \lambda \geq \omega$. Veamos que $(\kappa^{+})^{\lambda} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{+}$.

Con respecto al orden entre la base y el exponente, tenemos dos casos:

$\kappa^{+} \leq \lambda$] Por un lado, por **7**., tenemos que $(\kappa^{+})^{\lambda} = 2^{\lambda}$.
Y por el otro: Primeramente, $\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}$ y en segundo lugar, puesto que $\kappa^{+} \leq \lambda < 2^{\lambda}$, tenemos $(\kappa)^{\lambda} \cdot (\kappa^{+}) = 2^{\lambda}$.
Así, $(\kappa^{+})^{\lambda} = 2^{\lambda} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{+}$.

$\lambda < \kappa^{+}$] Este caso, lo probaremos por doble contención:

$\leq$] Como κ^{+} es regular, tenemos que $cof(\kappa^{+}) = \kappa^{+} > \lambda$. De esto tenemos que, si $f \in {}^{\lambda}(\kappa^{+})$, entonces $f[\lambda]$ es acotado en κ^{+}, es decir hay un $\alpha \in \kappa^{+}$ tal, que

$f : \lambda \to \alpha$ y de aquí que ${}^{\lambda}(\kappa^{+}) = \bigcup_{\alpha<\kappa^{+}} {}^{\lambda}\alpha$. Por lo tanto, tenemos:

$$(\kappa^{+})^{\lambda} = \left| {}^{\lambda}\left(\kappa^{+} \right) \right| = \left| \bigcup_{\alpha<\kappa^{+}} {}^{\lambda}\alpha \right| \leq \sum_{\alpha<\kappa^{+}} |\, \alpha \,|^{\lambda} \underset{|\alpha| \leq \alpha < \kappa^{+}}{\leq} \sum_{\alpha<\kappa^{+}} \kappa^{\lambda} = \kappa^{+} \cdot \kappa^{\lambda}$$

$\geq$] Ya que $\kappa < \kappa^{+}$, tenemos $(\kappa)^{\lambda} \leq (\kappa^{+})^{\lambda}$ y puesto que $\kappa^{+} \leq (\kappa^{+})^{\lambda}$, obtenemos:

$$\kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{+} \leq (\kappa^{+})^{\lambda}$$

†

Veamos ahora un par de resultados que nos darán algo de información, están basados en el Teorema de Köning.

Proposición$_2$. $\lambda \geq \omega \ \&\ \kappa \geq 2 \to cof(\kappa^{\lambda}) > \lambda$.

Prueba: Sea $\mu = cof(\kappa^{\lambda})$. Así, κ^{λ} se puede expresar como la suma de μ cardinales, cada uno de cardinal menor a κ^{λ}; es decir:

$$\kappa^{\lambda} = \sum_{\xi<\mu} \kappa_{\xi}$$

con $\kappa_{\xi} < \kappa^{\lambda}$, para toda $\xi < \mu$. Usando el Teorema de Köning tenemos,

$$\kappa^{\lambda} = \sum_{\xi<\mu} \kappa_{\xi} < \prod_{\xi<\mu} \kappa^{\lambda} = (\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$$

Ahora bien, si tuvieramos que $\mu \leq \lambda$, tendríamos que

$$\kappa^{\lambda} < \kappa^{\lambda\cdot\mu} = \kappa^{\lambda}$$

lo cual es absurdo. Así, $cof(\kappa^{\lambda}) = \mu > \lambda$. †

Como caso particular tenemos que, $cof(2^{\aleph_0}) > \omega$ y por tanto, $2^{\aleph_0}$ **no** puede ser $\aleph_{\omega}$, **ni** $\aleph_{\omega+\omega}$, **ni**, $\aleph_{\varepsilon_o}$, **ni** ningún cardinal cuya cofinalidad sea ω. Se puede probar, usando técnicas de Forcing, el recíproco de esto, es decir, puede ser que

$$cof(\kappa) \neq \omega \to 2^{\aleph_0} = \kappa.$$

Una lectura de la propiedad **7**, es que si el exponente sobrepasa o es igual a la base entonces el resultado de la exponenciación es: 2 elevado al exponente. Y ¿que ocurre en el caso en que el exponente sea menor que la base?. Una respuesta parcial nos la dá la siguiente,

Proposición$_3$.

i) $\forall\kappa \left[\kappa \geq \omega \to \kappa^{cof(\kappa)} > \kappa\right]$.

ii) $\forall\kappa\forall\lambda \left[\kappa \geq \omega \ \&\ \lambda \geq cof(\kappa) \to \kappa^{\lambda} > \kappa\right]$.

Prueba de **i**): Sean $\kappa \geq \omega$ y $\lambda = cof(\kappa)$. Sabemos que, $\kappa = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$ con $\kappa_\xi < \kappa$ para toda $\xi < \lambda$. Por el Teorema de Köning tenemos:

$$\kappa = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\lambda} \kappa = \kappa^\lambda$$

La prueba de **ii**) es inmediata de **i**). †

Una prueba alternativa a este resultado se debe al mismo Köning, la cual **no** usa el teorema que lleva su nombre, de hecho prueba **ii**) y como caso particular se tiene **i**):

Sea pues $\kappa \geq \omega$ y $\lambda \geq cof(\kappa)$ veamos que $\kappa^\lambda > \kappa$. Puesto que $\kappa \leq \kappa^\lambda$, basta ver que no hay funciones suprayectivas de κ en ${}^\lambda\kappa$. Sean $g : \kappa \to {}^\lambda\kappa$ y f testigo de la cofinalidad de λ en κ. Se define

$$h : \lambda \to \kappa$$
$$\forall \xi < \lambda, \quad h(\xi) = \bigcap \left[\kappa \setminus \left\{ (g(\nu))(\xi) \ / \ \nu < f(\xi) \right\} \right]$$

Así, h no está en la imagen de g y de aqui que g no sea suprayectiva.

Tarea. Justique la prueba anterior.

Con este resultado podemos dar otra prueba de la **Proposición$_2$**. Puesto que,

$$(\kappa^\lambda)^\lambda = \kappa^\lambda$$

tenemos, forzosamente, que, $\lambda < cof(\kappa^\lambda)$.

Hasta ahora sabemos que κ^λ es mayor estrictamente que κ cuando $\lambda \geq cof(\kappa)$; y toma el valor de 2^λ, cuando $\lambda \geq \kappa$. Se puede decir algo más cuando $cof(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$, veamos:

$$\kappa \underset{3.i)}{<} \kappa^{cof(\kappa)} \underset{cof(\kappa)\leq\lambda}{\leq} \kappa^\lambda \underset{\lambda\leq\kappa}{\leq} \kappa^\kappa \underset{\mathbf{7}}{=} 2^\kappa$$

Concretamos esto en:

Proposición$_4$. Sean $\kappa \geq \omega$ y $cof(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$. Así,

1. $\kappa < \kappa^\lambda \leq 2^\kappa$.
2. (**HGC**) $\kappa^\lambda = \kappa^+$.

Vamos ahora a preguntarnos: ¿Qué ocurre para κ^λ cuando $\lambda < cof(\kappa)$?

Sabemos que $\kappa \leq \kappa^\lambda$. Sea $\mu = cof(\kappa)$ y supongamos que $\lambda < \mu$.

De nuestra suposición obtenemos que, ${}^\lambda\kappa = \bigcup_{\alpha\in\kappa} {}^\lambda\alpha$. Con esto:

$$\kappa^\lambda = \left| \bigcup_{\alpha\in\kappa} {}^\lambda\alpha \right| \leq \sum_{\alpha<\kappa} \left| {}^\lambda\alpha \right| = \kappa \cdot \sup_{\alpha<\kappa} \left| \alpha \right|^\lambda$$

Ahora bien, ¿ Qué podemos decir de $\left| \alpha \right|^\lambda$, para $\alpha < \kappa$? Algo es:

$$\left| \alpha \right|^\lambda \leq \left(\left| \alpha \right| + \lambda \right)^{\left| \alpha \right| + \lambda} = 2^{\left| \alpha \right| + \lambda}$$

con $\left| \alpha \right| + \lambda < \kappa$. Pero de $2^{\left| \alpha \right| + \lambda}$ ¿Qué se puede decir?.

Del $\sup_{\alpha<\kappa} 2^{\left| \alpha \right| + \lambda}$ se puede ver que coincide con el punto de convergencia de la sucesión $\left\langle 2^\mu \ / \ \lambda \leq \mu < \kappa \right\rangle$ y de esto, no se puede decir **nada**; salvo si suponemos **HGC**:

$$\kappa^\lambda \leq \kappa \cdot \operatorname{Sup}_{\mu<\kappa} 2^\mu \underset{\textbf{HGC}}{=} \kappa \cdot \operatorname{Sup}_{\mu<\kappa} \mu^+ \underset{\mu^+\leq\kappa}{=} \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

Resumiendo:

Proposición$_5$. Sean $\kappa \geq \omega$ y $0 < \lambda < cof(\kappa)$. Así,

1. $\kappa \leq \kappa^\lambda \leq \kappa \cdot \operatorname{Sup}_{\mu<\kappa} 2^\mu$.
2. (**HGC**) $\kappa^\lambda = \kappa$.

Podemos dar otra prueba de esta proposición: Primeramente, recordemos algunos hechos:

Tenemos que, $[\kappa]^\lambda = \left\{ a \subseteq \kappa \ / \ \left| a \right| = \lambda \right\}$ y que $\left| [\kappa]^\lambda \right| = \kappa^\lambda$. Ahora, sea

$$A_k = \left\{ a \subseteq \kappa \ / \ a \text{ es acotado en } \kappa \right\}$$

Obsérvese que si a es acotado en κ, $a \in A_\kappa$, se tiene que $\left| a \right| < \kappa$, pero la conversa no es cierta (pues por ejemplo $\left| \aleph[\omega] \right| = \aleph_0 < \aleph_\omega$ y $\aleph[\omega]$ es no–acotado en $\aleph_\omega$). Ahora, si a es un subconjunto no-acotado de κ, entonces $\left| a \right|$ es cofinal en κ (¿Por qué?) y por tanto, $cof(\kappa) \leq \left| a \right|$, o equivalentemente, si $a \subseteq \kappa$ tal, que $\left| a \right| < cof(\kappa)$, entonces a es acotado en κ.

Supongamos ahora que $\lambda < cof(\kappa)$, por lo dicho arriba, $[\kappa]^\lambda \subseteq A_\kappa$, pero $A_\kappa \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \wp(\alpha)$. De todo esto, tenemos:

$$\kappa^\lambda = \left| [\kappa]^\lambda \right| \leq \left| \bigcup_{\alpha\in\kappa} \wp(\alpha) \right| \leq \sum_{\alpha<\kappa} 2^{\left| \alpha \right|} \underset{\textbf{HGC}}{=} \sum_{\alpha<\kappa} \left| \alpha \right|^+ \leq \sum_{\alpha<\kappa} \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

†

Al suponer la **HGC**, la exponenciación cardinal queda perfectamente determinada:

Corolario$_6$. (**HGC**) Sean $\kappa, \lambda \in CAR$. Así,

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{si} \quad \lambda < cof(\kappa) \\ \kappa^+ & \text{si} \quad cof(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa \\ \lambda^+ & \text{si} \quad \kappa \leq \lambda \end{cases}$$