Exponenciación en base 2

Veamos ahora algunos resultados conocidos para la exponenciación cardinal en base $2.$ La funcional exponenciación en base 2 aplicada a cardinales tranfinitos es conocida bajo el nombre de *Funcional Continuum.* Que por cierto, ésta es una funcional monótona **no**–decreciente.

Los siguientes resultados son para cuando el exponente es un cardinal límite.

Sean κ un límite y $\eta = cof(\kappa).$ Sabemos que $\kappa = \sum_{\alpha<\eta} \kappa_\alpha$ con $\eta \leq \kappa$ y $\kappa_\alpha < \kappa,$ para toda $\alpha < \eta.$ Con lo que, por lo pronto, tenemos

$$2^\kappa = 2^{\sum_{\alpha<\eta} \kappa_\alpha} = \prod_{\alpha<\eta} 2^{\kappa_\alpha} \quad \text{...} (*)$$

Esta última parte, $\prod_{\alpha<\eta} 2^{\kappa_\alpha},$ nos remite a pensar en el conjunto de todas las potencias, en base $2,$ con exponentes menores a κ y podríamos acotar el producto anterior usando el supremo de éstas. Un poco de notación.

Definición$_1$. Sea κ un cardinal límite. Pondremos

$$2^{<\kappa} = sup\left\{2^\lambda \ / \ \lambda < \kappa\right\}$$

Observación$_1$:

i) Para un cardinal límite κ, se tiene que, $\kappa \leq 2^{<\kappa} \leq 2^\kappa.$ Pues:
Pongamos por lo pronto, $2_{<\kappa} = \left\{2^\lambda \ / \ \lambda < \kappa\right\}.$
El hecho de que $2^{<\kappa} \leq 2^\kappa,$ se debe a que 2^κ es cota superior de $2_{<\kappa}.$
Por otro lado; para cada $\mu \in \kappa,$ se tiene que $\mu < 2^\mu \in 2_{<\kappa}.$ Por tanto,

$$\kappa = sup\, \kappa \leq sup\, 2_{<\kappa} = 2^{<\kappa}$$

ii) No necesariamente $2^{<\kappa} = 2^\kappa.$
Pues, por ejemplo, tenemos

$$2^{<\aleph_0} = sup\left\{2^n \ / \ n < \omega\right\} = \aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}$$

Otro ejemplo, bajo la **HGC**, es:

$$2^{<\aleph_\omega} = sup\left\{2^{\aleph_n} \ / \ n < \omega\right\} = sup\left\{\aleph_{n+1} \ / \ n < \omega\right\} = \aleph_\omega \neq 2^{\aleph_\omega}$$

Con esta notación, continuemos con nuestras ideas.

$$2^{\kappa} = \prod_{\alpha<\eta} 2^{\kappa_\alpha} \leq \prod_{\alpha<\eta} 2^{<\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^{\eta} \leq (2^{\kappa})^{\eta} = 2^{\kappa\cdot\eta} \underset{\eta\leq\kappa}{=} 2^{\kappa}$$

Con esto, hemos obtenido un resultado que podemos enunciar de la siguiente manera.

Proposición$_7$. Si κ es un cardinal límite, entonces

$$2^{\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^{cof(\kappa)}$$

Regresando a nuestra ecuación $(*)$, bien podemos pensar en la posibilidad, la consistencia relativa lo permite, de que la exponenciación en base 2, con exponentes menores a κ, se estacione. Se tiene el siguiente resultado para cardinales singulares, casos particulares de cardinales límites.

Proposición$_8$. Sea $\kappa \geq \omega$ y singular. Así,

$$\forall\mu\left[\forall\lambda\Big(\omega \leq \lambda < \kappa \rightarrow 2^{\lambda} = \mu\Big) \rightarrow 2^{\kappa} = \mu\right]$$

Prueba: Puesto que κ es singular, $\kappa = \sum_{\alpha<\eta} \kappa_\alpha$ con $\eta = cof(\kappa) < \kappa$ y $\kappa_\alpha < \kappa$, para toda $\alpha < \eta$. Ahora, supongamos que hay un μ, con la propiedad de que $2^{\lambda} = \mu$ para $\omega \leq \lambda < \kappa$. Así,

$$2^{\kappa} \underset{(*)}{=} \prod_{\alpha<\eta} 2^{\kappa_\alpha} = \prod_{\alpha<\eta} \mu = \mu^{\eta} \underset{\circledast}{=} (2^{\eta})^{\eta} = 2^{\eta\cdot\eta} = 2^{\eta} \underset{\circledast}{=} \mu$$

$\circledast$ como $\eta < \kappa$, se tiene que $2^{\eta} = \mu$. †

Por ejemplo, si supieramos que

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \ldots = 2^{\aleph_n} = \ldots = \aleph_{\omega+28}$$

el resultado nos garantiza que, $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+28}$.

Es de esperarse que este resultado también sea cierto si la funcional continuum se estaciona *a partir de un momento dado*. En vez de tratar de modificar la prueba anterior, daremos otra, basándonos en la primera proposición.

Proposición$_9$. Sea $\kappa \geq \omega$ y singular. Así,

$$\forall\lambda_0\left[\forall\lambda\left(\omega \leq \lambda_0 \leq \lambda < \kappa \rightarrow 2^{\lambda_0} = 2^{\lambda}\right) \rightarrow 2^{\kappa} = 2^{\lambda_0}\right]$$

Prueba: Tenemos que $\omega \leq cof(\kappa) < \kappa$. Basta considerar el caso en que $cof(\kappa) \leq \lambda_0 < \kappa$ (pues en caso de que $\lambda_0 < cof(\kappa)$, por hipótesis, $2^{\lambda_0} = 2^{cof(\kappa)}$ y sería suficiente con tomar $\lambda_0 = cof(\kappa)$). Por hipótesis, $2^{<\kappa} = sup\left\{2^{\lambda} \;/\; \lambda < \kappa\right\} = 2^{\lambda_0}$. De esto y la **Proposición**$_7$, tenemos:

$$2^{\kappa} \underset{\mathbf{P_7}}{=} \left(2^{<\kappa}\right)^{cof(\kappa)} = \left(2^{\lambda_0}\right)^{cof(\kappa)} = 2^{\lambda_0 \cdot cof(\kappa)} \underset{cof(\kappa)\leq\lambda_0}{=} 2^{\lambda_0} \qquad \dagger$$

Una pregunta natural es: ¿Qué ocurre si **no** se estaciona 2^{λ} para $\lambda < \kappa$? Se puede decir muy poco, si

$$2^{<\kappa} = sup\left\{2^{\lambda} \ / \ \lambda < \kappa\right\} = \mu$$

para algún $\mu \leq 2^{\kappa}$, resulta que μ es el supremo de una κ–sucesión monótona no-decreciente y por tanto, $cof(\mu) = cof(\kappa)$ (¡Probarlo!). Así,

$$2^{\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^{cof(\kappa)} = \mu^{cof(\mu)}$$

Tenemos una noción que es de relativa importancia en todo esto.

Definición$_2$. La funcional *Gimel,* $\gimel$, queda definida como sigue,

$$\gimel : CAR \to CAR$$
$$\forall \kappa \geq \omega \quad \gimel(\kappa) = \kappa^{cof(\kappa)}$$

En particuar si κ es regular, $\gimel(\kappa) = \kappa^{cof(\kappa)} = \kappa^{\kappa} = 2^{\kappa}$, es decir la funcional *gimel* coincide con la *continuum* en los cardinales regulares.