Cardinales Fuertes

Definición$_3$. Diremos que κ es *(un Cardinal) Fuerte* syss

$$\forall\lambda < \kappa \left[2^{\lambda} < \kappa \right]$$

Ejemplos:

1. ω es un cardinal fuerte

2. Bajo la suposición de la **HGC** tenemos que, $\aleph_\omega$ es un cardinal fuerte; de hecho, si $\alpha \in LIM$, entonces $\aleph_\alpha$ es fuerte.

Observación$_2$:

i) Si κ es un cardinal fuerte, entonces es un cardinal límite.
Pues si $\kappa = \lambda^+$, entonces como $\lambda < \lambda^+$ se tiene que $\kappa = \lambda^+ \leq 2^{\lambda}$ y por tanto, κ no es un cardinal fuerte.

ii) Si κ es un cardinal límite, no necesariamente se tiene que sea un cardinal fuerte. Pues por ejemplo, $\aleph_\omega$ es un cardinal límite y $\aleph_0 < \aleph_\omega$ y podría ser que, $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$.

Veamos algunas propiedades de los cardinales fuertes.

Proposición$_{10}$. Los cardinales fuertes son cerrados bajo la operación de exponenciación cardinal:

$$\forall\lambda,\ \mu < \kappa \left[\lambda^{\mu} < \kappa \right]$$

Prueba: Sea κ un cardinal fuerte y sean $\lambda,\ \mu < \kappa$. Así,

$$\lambda^{\mu} \leq (\lambda + \mu)^{\lambda+\mu} = 2^{\lambda+\mu} < \kappa$$

teniendo en cuenta, por supuesto, que $\lambda + \mu = max\left\{\lambda,\ \mu\right\} < \kappa$. †

Hay muchos cardinales fuertes, distintos de ω, de hecho tenemos:

Proposición$_{11}$. La clase de los cardinales fuertes es confinal con CAR.

$$\forall\lambda\ \exists\kappa \left[\ \kappa > \lambda\ \&\ \kappa \text{ es fuerte } \right]$$

Prueba: Sea $\lambda \in CAR$ arbitrario. Definimos recursivamente f_λ como sigue:

$$f_\lambda : \omega \rightarrow CAR$$

i) $f_\lambda(0) = \lambda$

ii) $\forall n \in \omega,\ f_\lambda(n^+) = 2^{f_\lambda(n)}$

Sea $\kappa = \lim\limits_{n\to\omega} f_\lambda(n)$. Así, κ satisface lo pedido. De hecho, entre λ y κ no hay ningún cardinal fuerte. †

Una propiedad que no podemos dejar de mencionar es:

Proposición$_{12}$.

i). Si κ es fuerte, entonces $2^{<\kappa} = \kappa$. Y por tanto, para un cardinal fuerte κ, se tiene que $2^{<\kappa} < 2^{\kappa}$.

ii). Si $2^{<\kappa} = \kappa$ y κ es singular, entonces κ es fuerte.

Prueba:
i). Sea κ un cardinal fuerte. Tenemos que κ es límite y por la **Observación**$_{1.i)}$, $\kappa \leq 2^{<\kappa}$. Por otro lado, de la definición de fuerte, κ es cota superior de $\left\{2^{\lambda} \ / \ \lambda < \kappa\right\}$ y por tanto, $2^{<\kappa} \leq \kappa$.
ii). Si κ es singular y $2^{<\kappa} = \kappa$, entonces la función *continuum* **no** se puede estacionar por abajo de κ, pues en caso contrario habría una contradicción con la **Proposición**$_9$. Sea pues, $\mu < \kappa$; hay un μ_0 tal que $\mu < \mu_0 < \kappa$ y $2^{\mu} < 2^{\mu_0} \leq 2^{<\kappa} = \kappa$. †

Corolario$_{13}$. Si κ es fuerte, entonces $2^{\kappa} = \kappa^{Cof(\kappa)} = \gimel(\kappa)$.
Prueba: $2^{\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^{Cof(\kappa)} = \kappa^{Cof(\kappa)}$ †

Podemos dar otros ejemplos de cardinales límites que son fuertes, y para ello, nos ayudamos con:

Definición$_4$. La funcional *Beth,* $\beth$, queda definida recursivamente sobre OR, como sigue:

$$\beth : OR \to CAR$$

$$\begin{array}{lrl} \text{i)} & & \beth_0 = \aleph_0 \\ \text{ii)} & \forall\alpha, & \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} \\ \text{iii)} & \forall\beta \in LIM, & \beth_\beta = sup\left\{\beth_\alpha \ / \ \alpha < \beta\right\} \end{array}$$

Observación$_3$.

1. Bajo la suposición de la **HGC**, $\beth = \aleph$. Es decir, $\forall\alpha$, $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$.

2. Si $\alpha \in LIM$, entonces $\beth_\alpha$ es fuerte.

3. Para $\alpha \in OR$, se tiene que $\beth_{\alpha+\omega}$ es el primer cardinal fuerte mayor que $\beth_\alpha$.

4. Si $\alpha \in LIM$, entonces $cof(\beth_\alpha) = cof(\alpha)$.

5. $\beth_{\omega}$, $\beth_{\omega_1}$, $\beth_{\omega_\omega}$, son cardinales fuertes y singulares.

6. La Funcional $\beth$, es monótona y continua, es decir es normal.

7. El primer punto fijo de beth, $\beth_{\kappa} = \kappa$, es un cardinal fuerte que tiene cofinalidad ω y por tanto es singular.

8. Todo cardinal fuerte es un *beth*. (**TAREA**)

Es claro que la *beth* nos proporciona muchos ejemplos de cardinales fuertes. Tenemos que ω es el primer cardinal fuerte y es regular, pero todos los demás que nos vienen a la mente son singulares. ¿Habrá cardinales incontables, fuertes y regulares? La respuesta es similar a la dada para los cardinales (débilmente) inaccesibles. Formalizemos:

Definición$_5$. (**Sierpinski–Tarski**)
κ es un *Cardinal Fuertemente Inaccesible* syss

i) $\kappa > \omega$,

ii) κ es un cardinal fuerte, Y

iii) κ es un cardinal regular.

Puesto que los cardinales fuertes son cardinales límites, entonces *todo fuertemente inaccesible es (débilmente) inaccesible.* Y si suponemos la **HGC** tenemos que *todo (débilmente) inaccesible es fuertemente inaccesible.*

Los cardinales fuertemente inaccesibles tienen propiedades de cerradura muy fuertes y de ahí el nombre.

Proposición$_{14}$. Sea κ un cardinal fuertemente inaccesible. Así:

1. Si $|\, a \,| < \kappa$, entonces $|\, \wp(a) \,| < \kappa$.

2. Si para toda $i \in I$, $|\, a_i \,| < \kappa$, con $|\, I \,| < \kappa$, entonces $\left|\, \bigcup_{i \in I} a_i \,\right| < \kappa$.

3. Si $|\, a \,| < \kappa$ y $f : a \to \kappa$, entonces $|\, \bigcup f[a] \,| < \kappa$.

Prueba: **TAREA**.

Terminamos esta sección con un comentario:

Bajo la suposición de la existencia de cardinales inaccesibles, es consistente que $2^{\aleph_0}$ sea débilmente inaccesible o que sea tan grande como el primer inaccesible débil.

†