# Lenguajes de Primer Orden

$\mathscr{N.N.M}$

22 de agosto de 2014

**Resumen**

El siguiente material es para aclarar los asuntos del lenguaje.

La Lógica Matemática da al Razonamiento Matemático el arte y la ciencia de escribir bajo deducciones, las cuales tienen *forma, significado, uso y limitaciones*.

## 1. Lenguajes de primer orden

En el modo de describirlo más abstracto (y por ello más simple) una *teoría matemática formal* consiste de las siguientes colecciones: Un conjunto de símbolos básicos o primitivos, $\mathcal{V}$, utilizados para construir *sucesiones de símbolos* (también llamadas expresiones o palabras) *sobre* $\mathcal{V}$. Un conjunto de expresiones, **Fbf** (Formulas bien formadas), *sobre* $\mathcal{V}$ llamadas las *fórmulas* de la teoría. Finalmente, un *subconjunto de* $\mathcal{V}$, llamado **Thm**, la colección de *teoremas* de la teoría.

Pues bien, esta es la *extensión* de una teoría, esto es, el conjunto explícito de objetos en ella. Pero, ¿Cómo es una teoría "dada"?

En la mayoría de los casos de interés para el matemático, esta dada por $\mathcal{V}$ y dos tipos de *reglas simples*; reglas de construcción de fórmulas y reglas de construcción de teoremas. Las reglas del primer tipo nos permiten construr, o *generar*, **Fbf** *desde* $\mathcal{V}$. Las reglas del segundo tipo generan **Thm** desde **Fbf**. En pocas palabras, *una teoría consiste de un abecedario de símbolos primitivos*, *algunas "reglas" usadas para generar el lenguaje de la teoría"* (**Fbf**) *a partir de esos símbolos*, *y algunas reglas "adicionales" usadas para generar los teoremas*. Sobre esto ampliamos a continuación:

**Observación 1.1.** $\diamondsuit$ ¿Qué es una regla? Intuitivamente, las reglas que tenemos en mente son reglas de manipulación de "palabras", esto es, *cajas negras* (o funciones) que reciben como entradas a "secuencias" de palabras y responden con "palabras" como salidas. Por ejemplo, un principio de construcción muy conocido recibe como entrada una fórmula y una variable, y devuelve la *palabra* formada por el símbolo $\forall$ seguido de la variable y esta, a su vez, por la fórmula.[1] $\diamondsuit$

(1) En primera instancia , el *lenguaje formal (de primer orden)*[2] $\mathscr{L}$, donde se discute la teoría, es una terna **($\mathscr{V}$,TERM,Fbf)**, esto es, tiene tres componentes importantes, cada uno de los cuales es un conjunto.

$\mathscr{V}$ es el "abecedario" o vocabulario del lenguaje. Es la colección de los "ladrillos" sintácticos básicos que usamos para formar *expresiones* que son *términos* (miembros de **TERM**) o *fórmulas* (miembros de **Fbf**). nos aseguraremos que los procesos con que construimos términos o fórmulas, son "mecánicos".

Los términos codificarán formalmente "objetos", mientras que las fórmulas codificarán "proposiciones" acerca de esos objetos.

(2) El razonamiento en la teoría será el proceso del descubrimiento de *proposiciones "verdaderas"* (según la teoría) sobre objetos, es decir, *teoremas*, que comienza con determinadas fórmulas que codifican proposiciones que damos por sentadas (i.e., aceptamos sin "demostrar" como verdades básicas). Tales fórmulas son los *axiomas*. Hay dos tipos de ellos:

Axiomas *especiales* o *no lógicos*. Describen aspectos específicos de cualquier teoría específica que querramos construir. Por ejemplo, "$x+1 \neq 0$" es un posible axioma particular que contribuye a la caracterización de la Teoría de Números en los números naturales, $\mathbb{N}$.

El otro tipo de axiomas será común a *todas* las teorias. Es el tipo de cosas "universalmente válidas", no son exclusivas de una teoría específica (por ejemplo, "$x = x$" es una "verdad universal"). Por esa razón este tipo de axioma será denominado *lógico*.

(3) Por último, necesitaremos *reglas* para el razonamiento, llamadas *reglas de inferencia*. Estas reglas son las que nos permitirán dedu-

[1] Esta regla es conocida como "generalización".

[2] Pronto diremos que significa que un leguaje sea "de primer orden".

cir, o derivar, una proposición "verdadera" a partir de otras que ya hemos establecido como "verdaderas".[3]

Tales reglas serán elegidas olvidando su significado, y preocupándonos tan solo por la forma. Ellas aplicarán a un enunciado "configuraciones" de ciertas *formas reconocibles* y producirán (derivarán) nuevas sentencias entre algunas *formas reconocibles correspondientes* (Remítase a la observación 1.1).

Un ejemplo, fuera del contexto matemático, de un *protocolo* de entrada es la orden invocada cuando tecleamos **date** en la consola de la computadora. Esta orden no recibe entrada, y muestra la fecha actual en la pantalla.

Siguiendo con nuestra descripción cuidadosa de los lenguajes formales (de primer orden), hay dos partes en cualquier abecedario (de un lenguaje de primer orden). La primera es la colección de *símbolos lógicos* y *es común a todos los lenguajes de primer orden* sin importar la teoría de la cual trate. Veamos cuáles son:

**Símbolos Lógicos**

**SL-1.** *Variables objeto o individuales*. Una *variable objeto* es cualquier símbolo (único) de la sucesión (potencialmente) infinita $v_0, v_1, v_2, \ldots$. En la *práctica* relajamos la notación y usamos $x, y, z, w, x', y', v', z_0$ como *nombres* de variables objeto.[4] Nosotros permitiremos escribir, por ejemplo, "$z$" en lugar de "$v_{1200000005600009}$". Las variables objeto (intuitivamente) "varían sobre" los abjetos de la teoría que se estudia (números, conjuntos, átomos, líneas, puntos, etc., según sea el caso).

**SL-2.** *Los conectivos Booleanos o proposicionales*. Estan los símbolos "$\neg$", "$\vee$", "$\wedge$", "$\longrightarrow$" y "$\longleftrightarrow$". [5] que llamamos *negación*, *disyunción*, *conjunción*, *implicación* y *doble implicación*, y que se pronuncian *no*, *o*, *y*, *si. . . , entonces*, *si y sólo si*, respectivamente.

[3]El uso del término "verdadera" es para motivar. El concepto de "fórmula demostrable", "fórmula deducible", o "teorema" pronto será definido de manera precisa para reemplazar la expresión "proposición verdadera".

[4]Convenciones como esta son, en esencia, licencias –en la metateoría– para ser descuidado y salir impune. Aquí se dan por su facilitar el manejo.

[5]Las comillas no son parte del símbolo, sólo sirven para separar lo que si pertenece al símbolo y lo que no.

**SL-3.** *Cuantificadores*. El cuantificador existencial es el símbolo "$\exists$", que se conoce como *existe, para algún(a)*. El cuantificador universal el el símbolo "$\forall$", que se le pronuncia como *para todos, Todos*.

**SL-4.** *Paréntesis*. Ellos son "(" y ")".

**SL-5.** *La igualdad (Predicado de igualdad)*. Es el símbolo "=", que usamos para indicar que dos objetos son iguales y se pronuncia *igual a*.

$\diamondsuit$ Los símbolos lógicos tendrán una interpretación fija. En particular "=" siempre significará *igual a*. $\diamondsuit$

La parte teórico-específica del alfabeto no es fija, varía según la teoría. Por ejemplo, en Teoría de Conjuntos sólo tenemos un símbolo no-lógico (o especial) $\in$, que es un *símbolo predicativo* (o predicado) de *aridad* 2.[6]

En teoría de números adoptamos los símbolos $\sigma$ (sucesor o función "$\_ + 1$"), $+$, $\times$, 0, $<$, y (algunas veces) un símbolo para la operación (función) exponenciación $a^b$. Los primeros tres son *símbolos funcionales* de aridades respectivas uno, dos y dos. 0 es un *símbolo constante*, $<$ un predicado de aridad dos, y sea cual sea el símbolo que introduzcamos para $a^b$ debe tener aridad dos.

La siguiente lista nos da un panorama general.

**Símbolos No-lógicos.**

**SNL-1.** Un conjunto (posiblemente vacío) de simbolos *constantes*. Normalmente usaremos los metasímbolos[7] $a, b, c, d, e$, ya sea con o sin subíndices o apóstrofes, para representar constantes.

**SNL-2.** Un conjunto (posiblemente vacío) de *símbolos de predicado o relacionales* para cada posible "aridad" $n > 0$. Normalmente usamos *P, Q, R* de forma genérica, para denotar símbolos de predicado. Observe que = está en el campo lógico. También observe que los símbolos formales de la teoría específica son símbolos de predicado, e.g. $<, \in$.

[6] "Aridad" es un término *hecho* por matemáticos. Está presente en la parte de "ario" en "un*ario*", "bin*ario*", etc. Denota el número de argumentos necesarios por un símbolo para que este correctamente escrito (sintácticamente). Los símbolos de predicado y funcionales necesitan argumentos.

[7] Los *meta*símbolos son símbolos *informales* (i.e. fuera del lenguaje formal) que usa mos "a diario" dentro de la matemática "real" –la *meta*teoría– para describir el lenguaje formal.

**SNL-3.** Para terminar, un conjunto (posiblemente vacío) de *simbolos funcionales* para cada "aridad" posible $n > 0$. Usamos genéricamente $f$, $g$, $h$, para denotar símbolos funcionales. Observe que los símbolos formales de la teoría específica son símbolos funcionales, e.g. $+, \times$.

**Observación 1.2.** $\diamondsuit$

(1) Constantemente abusamos de nuestro lenguaje y deliberadamente haremos uso indistinguido de los nombres y los símbolos que nombran. Decimos, por ejemplo "sea $v_{1007}$ una variable objeto ..." en vez de "sea $v_{1007}$ el nombre de una variable objeto ...", lo que no nos causa gran problema.

(2) *Cualesquiera dos símbolos* presentes en el alfabeto son *distintos*. Más aún, si ninguno de ellos es comstruido a partir de otros "subsímbolos más simples" –e.g.,$v_0, v_1, v_2, \ldots$ podrían *nombrar en realidad* a las expresiones $vv, v|v, v||v, \ldots$– entonces ninguno de ellas es una *subexpresión* de nunguna otra.[8]

(3) Un lenguaje formal, lo mismo que un lenguaje "natural" (como el Español, el griego o el Inglés), está vivo y evoluciona. El tipo de evolución particular que tenemos e mente es uno efectuado por las *definiciones formales*. Tales definiciones *agregan* constantemente símbolos no-lógicos al lenguaje.

Así, cuando decimos, por ejemplo, "$\in$ es el único símbolo no lógicos de la Teoría de Conjuntos", estamos diciendo una pequeña mentira blanca. Con mayor presición tendríamos que decir que "$\in$ es el único símbolo lógico 'primitivo'de la Teoría de Conjuntos", porque añadiremos una cantidad considerable de símbolos tales como $\cup, \omega, \emptyset, \subset, \subseteq$.

Esta evolución afecta el lenguaje formal del que se hable en *cualquier* teoría, no sólo en la Teoría de Conjuntos. $\diamondsuit$

$\diamondsuit\diamondsuit$ ¡Un momento! Sí la Teoría de Conjuntos formal es "el fundamento de toda la Matemática", y sí, como parece ser, estas notas nos ayudan a establecer a la misma Teoría de Conjuntos , entonces ¿Cómo es que estamos empleando *números naturales*, digamos 1200000000560000009 a modo de *subíndices* en los *nombres* de las variables objeto? ¿Cómo es que está permitido támbien hablar sobre "conjuntos de símbolos" cuando lo que buscamos es establecer la Teoría de Comjutos formalmente? Sin

[8] ¡Lo que hemos dicho en (2) son *requerimientos*, no metateoremas! Es decir, no son del tipo de cosas que podamos *demostrar* sobre nuestro lenguaje formal dentro de la matemática cotidiana.

duda aún no "tenemos"[9] ninguno de esos "elementos" ¿O si?

Una forma, de interpretar lo dicho acerca de variables objeto en la definición es tomarla literalmente, esto es, suponer que habla acerca del carácter ontológico de las variables.[10] A saber, el subíndice es solo una expresión de símbolos carentes de significado tomadas de la siguente lista:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Podemos pretender otra vez no conocer a números naturales (nadie ha tenido la decencia de presentármelos), y cuando, e.g., queremos una variable distinta de $v_{123}$ o de $v_{321}$, podemos tomar o bien a $v_{123321}$ o a $v_{321123}$ como una *nueva* variable.

O.K. Así *no* usamos números naturales en la definición. Pero dijimos "conjuntos" y "sucesión sin final", lo cual implica la presencia de *conjuntos infinitos*.

Como ya habremos notado, por un lado tenemos la "Matemática Real", y por el otro *réplicas sintácticas* de teorías –las teorías formales– que hemos construido *dentro de la Matemática Real*. Teniendo una teoría formal construida, podemos elegir *usarla* (actuando cono formalistas) para generar teoremas, siendo estos codificados como sucesiones de símbolos (fórmulas). Así, la afirmación "la Teoría Axiomática de Conjuntos es el fundamento de toda Matemática" es un coloquialismo proferido desde la metateoría y quiere decir "dentro de la Teoría axiomática de Conjuntos podemos construir los conjuntos conocidos de la Matemática, tales como los números reales $\mathbb{R}$ y los números complejos $\mathbb{C}$, y además podemos simular lo que informalmente hacemos cuando estamos trabajando en el Análisis real o complejo, el Álgebra, la Topología, la Teoría de la Medida y la Integración, Análisis Funcional, etc. etc.".

No hay circularidad en esto, sino una observación empírica un tanto jactanciosa *en la metateoría* de lo que nuestro simulador puede hacer. Además, nuestra metateoría tiene conjuntos y toda suerte de otros objetos matemáticos. En principio podemos utilizar cualquiera de entre aquellas construcciones o discutir el simulador, la teoría formal.

---

[9] "No tenemos" en el sentido de no haberlas formalmente definidos o demostrado su existencia, o ambos.

[10] ¿Porqué no sólo decir *exactamente* lo que una definicón quiere decir en vez de dejarla abierta a interpretación? Se puede dejar perfectamente claro el carácte ontológico de las variables en la definición, como en [**?**]. En vez de eso, seguiremos la costumbre reciente y daremos las definiciones de una manera inacabada y dejamos el carácter ontológico de las variables como materia de especulación. Esto nos da una excusa para escribir pies de página como este u observaciones como 1.2.

Así, la cuestión no esta en si podemos usar conjuntos, o números naturales, en nuestras definiciones, pero si se aplican restricciones. Por ejemplo, ¿Podemos usar conjuntos infinitos?

Si fueramos Platonistas, tendríamos disponible en la metateoría todo tipo de conjuntos, incluso los conjuntos infinitos, en particular el conjunto de todos los números naturales. Podemos usar cualquiera de estos elementos, hablar sobre ellos, etc., como lo deseemos, cuando etamos describiendo o construyendo la teoría formal *desde nuestra metateoría*.

Ahora que si no fueramos Platonistas, entonces nuestro mundo matemático "real" es mucho mas restringido. En extremo, *no* tenemos conjuntos infinitos.[11]

Aún asípodemos llegar a definir nuestro lenguaje formal. Despues de todo, la sucesión "sin fin" de variables objeto $v_o, v_1, v_2, \ldots$ puede ser *finitamente generado* en dos maneras al menos, como ya hemos visto. De esta forma podemos explicar (a un verdadero formalista o finitista) que una "sucesión sin fin" fue un desafortunado *lapsus linguae*, pues lo que realmente queriamos era dar un *procedimiento* para generar "sobre pedido" una *nueva variable*, distinta de cualesquiera que ya pudiesemos tener.

Dos comentarios finales el respecto: El primero, hemos sido un poco selectivos al hacer uso del término "metavariable". Hemos llamado a $x, x', y$ metavariables, pero hemos hecho implícito que las "$v_i$" son variables formales, tanto si son sólo *nombres* u objetos formales a los que no conocemos o no nos importa lo que parezcan. Bien, siendo estrictos al hablar, las abreviaturas $v_i$ son tambien metavariables, pero dotados con una propiedad que las metavariables "genéricas", como $x, y, z'$, no necesariamente tienen: Nombres distintos $v_i$ denotan variables objeto distintas (cf. observación 1.2).

El segundo, demos debemos aclarar que una teoría formal, cuando se utiliza (i.e. cuando el simulador se "echa a andar") es una *generador* de expresiones, *no* toma desiciones, ni "analiza". Esto es, puede *generar* cualquiera de las siguientes: variables (si estas están dadas por procedimientos), fórmulas y términos (por definir), o teoremas (tambien por definir). Loa *problemas de desición*, sin importar cuán triviales sean, no son posibles resolver, pues el sistema no esta construido para manejarlos. Ellos pertenecen a la metateoría. En particular, la teoría no distin-

[11]Un finitista te permite utilizar tantos enteros como sean necesarios, mientras sean una *cantidad finita*. Si preguntas por mas, puedes tener mas, pero nunca el conjunto de todos los números enteros ni algún subconjunto infinito de él.

gue que números o expresiones (como 12005) pueden estar ocultos en el nombre de una variable (como $v_{12005}$).

*Ejemplos de problemas de desición:* ¿Qué es esta expresión, un término, una fórmula o una variable? Este tipo de preguntas son “sencillas”: Son decidibles en la metateoría de forma algorítmica. O bien ¿Esta fórmula es un teorema? Esta no es decidible de manera algorítmica en la metateoría si se trata de la Aritmética de Peano o la Teoría de Conjuntos. ◊◊

**Definición 1.1. (Terminología acerca de expresiones).** Una sucesión de símbolos *finita*, o *expresión* formada solamente usando los símbolos presentes en una colección $M$ dada[12] es llamada *una expresión sobre el “conjunto”, o alfabeto, $M$*.

Si $A$ y $B$ denotan expresiones (digamos sobre M), entonces el símbolo $A * B$ o simplemente $AB$, denota la sucesión de símbolos obtenida al listar de izquierda a derecha primero los símbolos de $A$, seguidos inmediatamente por los símbolos de $B$. Decimos que $AB$ es (mejor dicho, denota o nombra) la *concatenación* de las expresiones $A$ y $B$, en ese orden.

Decimos que $A$ *ocurre en $B$, o es una subexpresión de $B$*, sii hay expresiones $C$ y $D$ tales que $B \equiv CAD$.

Por ejemplo, “(” ocurre cuatro veces en la expresión “$\neg()\vee)(($”, *en las posiciones* $2,3,7,8$. Cada vez que esto pasa, tenemos *una ocurrencia* de “(” en “$\neg()\vee)(($”.

**Definición 1.2. Términos.** El conjunto de *términos*, **TERM**, es el *menor* conjunto de expresiones sobre el alfabeto $\mathcal{V}$ con las siguientes propiedades:

(1) Todos los elementos en **SL-1** o en **SNL-1**($x, y, z, a, b, c$, etc.) están presentes en $\mathcal{V}$.

(2) Si $f$ es una función[13] de aridad $n$ y $t_1, t_2, ..., t_n$ son elementos de $\mathcal{V}$, también lo es la expresión “$f t_1 t_2 ... t_n$”.

Los símbolos $t, s$ y $u$ con o sin subíndices o apóstrofes, denotarán términos arbitrarios. Como los estamos usando en el *metalenguaje* para “variar sobre” los términos, naturalmente les llamaremos metavariables. Tambien sirven –como variables– para la definición de la *interpretaación* de los términos.

[12] Una colección que provee símbolos para construir expresiones no tiene nada de especial, es sólo un conjunto. Sin embargo, tiene un nombre:“abecedario” o “alfabeto”.

[13] A veces diremos función en vez de símbolo funcional, constante en vez de símbolo constante y predicado o relación en vez de símbolo predicativo.

**Observación 1.3.** $\diamondsuit$ (1) Muchas veces haremos abuso de notación y escribiremos $f(t_1,...,t_n)$ en vez de $ft_1...t_n$.

(2) La definición 1.2 es una *definición recursiva*.[14] Ella define terminos mas o menos "complicados" asumiendo que ya conocemos los términos más simples ya vistos. Esta es una técnica estándar empleada en la Matemática Real. Tendremos oportunidad de decir algo más sobre las definiciones recursiva –y su conveniencia– a lo largo de este curso (y el de Lógica).

(3) Aclararemos esta particular forma de definir términos a nuestra definición operante de una teoría (Dada inmediatamente antes de la observación 1.1, en términos de "Reglas de Formación"). El numeral (2) en la definición anterior dice, esencialmente, que podemos construir nuevos términos (a partir de otros) aplicando la siguiente *regla general*: Elige un símbolo funcional arbitrario, digamos $f$. Este tiene una regla de formación específica asociada con la que, para un apropiado número $n$, de una lista ordenada de términos ya existentes, $t_1,...,t_n$, construiremos un nuevo término que consiste de $f$, seguido inmediatamente por la lista ordenada de términos dados.

Para ser específicos, supongamos que estamos trabajando en el lenguaje de la teoría de números. Hay un símbolo funcional disponible, $+$. La regla asociada a $+$ construye el término nuevo $+ts$ para cualesquiera términos obtenidos antes, $t$ y $s$. Por ejemplo, $+v_1v_{13}$ y $+v_{121}+v_1v_{13}$ son términos bien formados. Normalmente escribimos tales términos en notación "infija",[15] i.e., $t+s$, $v_1+v_{13}$ y $v_{121}+(v_1+v_{13})$ (observe la inclusión de paréntesis, para indicar la secuencia de aplicación de $+$).

Un subproducto de lo que acabamos de describir es que *la aridad de un símbolo funcional es la cantidad de términos que la regla asociada requiera como entradas*.

(4) Una frase crucial empleada en la definición anterior (que aparece en todas las definiciones inductivas) es *el menor*, y se aplica como en Teoría de Conjuntos en el sentido de la "contención". Por ejemplo, podemos facilmente pensar en un conjunto de expresiones que satiisfagan ambas condiciones en la definición anterior, pero que *no* sea el "menor", en virtud de presentar elementos adicionales, tales como la expresión "$\neg\neg($".

[14] Si, para nosotros las definiciones son *recursivas* y que las demostraciones son "inductivas".

[15] El símbolo funcional es ubicado enmedio de los argumentos.

**Meditación 1.1.** *Porqué "$\neg\neg($" no está en el menor conjunto de la definición, y por ello no es un término?*

El lector puede desear pensar aún más la cuestión, considere un ejemplo familiar, el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$. El principio de inducción en $\mathbb{N}$ asegura la existencia de un conjunto que es *el menor* con las propiedades:

(i) 0 está incluido, y
(ii) si $n$ esta incluido, también lo está $n+1$.

En contraste, los conjuntos $\mathbb{Z}$ (Enteros), $\mathbb{Q}$ (Racionales), $\mathbb{R}$ (Reales), también satisfacen (i) y (ii), pero claramente ninguno es "el menor". $\diamondsuit$

**Definición 1.3. (Fórmulas Atómicas).** El conjunto de *fŕmulas atómicas*, **Fa**, es aquel que consiste precisamente de:

(1) las expresiones $t = s$ para cualquier elección de términos $t, s$.

(2) Las expresiones $Pt_1...t_n$ para todas la elecciones posibles de símbolos de predicado $n$-arios (y para cualquier $n > 0$) y para todas las posibles elecciones de términos $t_1, ...t_n$.

$\diamondsuit$ A menudo cometemos abusos de notación y escribiremos $P(t_1, ..., t_n)$ en vez de $Pt_1...t_n$. $\diamondsuit$

**Definición 1.4. (Fórmulas bien formadas).** El conjunto de *fórmulas bien formadas*, **Fbf**, es *el menor* conjunto de expresiones sobre un alfabeto $\mathscr{V}$ con las siguientes propiedades:

(a) Todos los elementos de **Fa** están incluidos.

(b) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ denotan expresiones (sobre $\mathscr{V}$) que están incluidas, también lo están $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$, $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$, $(\mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B})$, $(\mathscr{A} \longleftrightarrow \mathscr{B})$ y $(\neg\mathscr{A})$.

(c) Si $\mathscr{A}$ denota una expresión que está incluida y $x$ es una variable objeto (*que puede o no ocurrir en* $\mathscr{A}$ (aparecer pues), entonces las expresiones $(\exists x\mathscr{A})$ y $(\forall x\mathscr{A})$ también lo está, y decimos que $\mathscr{A}$ es el *alcance (o ámbito)* del cuantificador que se trate

**Observación 1.4.** $\diamondsuit$

(1) La definición anterior es nuevamente recursiva.La definición de **Fbf** dada es la corriente. En particular, permite fórmulas bien formadas como $\big(\exists x\big(\exists x(x=0)\big)\big)$.

(2) Las reglas sintácticas recién dadas no nos permiten escribir cosas como $\exists f$ o $\exists P$, donde $f$ y $P$ son símbolos, el primero funcional y el otro de predicado. Esta cuantificación está restringida deliberadamente para actuar solamente en variables objeto, y hace del lenguaje uno de *primer orden*.

(3) Ya hemos indicado en la observación 1.3 de donde provienen las aridades, ya sea de símbolos funcionales o predicativos (las definiciones 1.2 y 1.3 se refieren a ello). Hay números que están implícitos ("cableados") con las reglas de formación de términos y fórmulas atómicas. Cada símbolo funcional y cada símbolo de predicado (e.g. $+, \times, \in, <$ ) tiene su propia regla única de formación. Esta "sabe" cuantos términos, en orden, son necesarios (como entrada) para formar un término o una fórmula atómica. Por tanto, de la teoría, *en uso*, aplica más que el estudio de sus reglas de formación, y es, en particular, ignorante de aridades de símbolos.

(4) Podríamos haber comenzado[16] con solo dos símbolos booleanos (negación y disyunción) y el cuantificador existencial, y después hacer uso de las siguientes. . . *Abreviaturas*

**Abr. 1** La expresión $(\forall x \mathscr{A})$ abreviaría a la expresión "$\big(\neg\big(\exists x(\neg\mathscr{A})\big)\big)$". Así, para cualquier fórmula escrita explícitamente $\mathscr{A}$, la notación inicial sería informal (metamatemática), mientras que la última es formal (dentro del lenguaje formal). En particular, $\forall$ sería un símbolo metalingüístico.

**Abr. 2** *(Conjunción, $\wedge$)* $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ abrevia $(\neg((\neg\mathscr{A}) \vee (\neg\mathscr{B})))$. El símbolo $\wedge$ se pronuncia *y*.

**Abr. 3** *(Implicación material o clásica, $\rightarrow$)* $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ abrevia $((\neg\mathscr{A})\vee\mathscr{B})$. $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ se pronuncia *si $\mathscr{A}$, entonces $\mathscr{B}$*.

**Abr. 4** *(Equivalencia, $\leftrightarrow$)* $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ abrevia $((\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}))$.

(5) Con objeto de minimizar el uso de paréntesis en la metanotación adoptaremos una *jerarquía de conectivos*: $\forall, \exists, \neg$ tienen la prioridad, y despues (por orden descendente de prioridad) $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ y acordamos no hacer uso de los paréntesis externos (el primero y el último).

Una variable que esta cuantificada *es acotada en el alcance del cuantificador*. Las variables sin cuantificar son *libres*. A continuación daremos, por recursión sobre las fórmulas, definiciones (metamatemáticas) precisas de "libre" y "acotada".

[16] Como se hace enlos cursos de Lógica

**Definición 1.5. Variables libres y variables acotadas.** Una variable objeto $x$ *ocurre libre* en un término $t$ o fórmula atómica $\mathscr{A}$ sii ella ocurre en $t$ o aparece en $\mathscr{A}$.

$x$ ocurre libre en $(\neg\mathscr{A})$ sii ocurre libre en $\mathscr{A}$.

$x$ ocurre libre en $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ sii ocurre libre en alguna, es decir, en $\mathscr{A}$ o en $\mathscr{B}$. Es claro que quiere decir que sea libre en alguno de los otros conectivos booleanos.

$x$ ocurre libre en $(\exists y\mathscr{A})$ sii $x$ ocurre libre en $\mathscr{A}$, y $y$ es una variable *distinta* de $x$.[17]. Lo mismo aplica para el cuantificador universal.

La variable $y$ en $(\exists y\mathscr{A})$ *no* es, desde luego, libre –aunque pueda serlo en $\mathscr{A}$– como acabamos de concluir en esta definición recursiva. Decimos que ella, $(y)$, *es acotada* en $(\exists y\mathscr{A})$. Evidentemente, términos y fórmulas atómicas no tienen variables acotadas.

[17] Hay que recordar que $y$ y $y$ son abrevaciones de nombres como $v_{1200098}$ y $v_{11009}$ (que nombran a variables distintas). Sin embargo, podría ser que $x$ y $y$ nombren a la misma variable. Por tanto, no es redundante decir "y $y$ es una variable *distinta* de $x$"