Relacionales II.

Naim Nuñez Morales.

9 de septiembre de 2014

Resumen

En estas notas estudiaremos algunas *características* de una relacional $\mathbf{R}$ respecto a una clase A, las cuales nos permitirá establecer los conceptos clásicos de orden parcial, orden total, buen orden, entre otros.

Típicamente las siguientes definiciones se dan bajo una condición muy fuerte; $CMP(\mathbf{R}) \subseteq A$ (o equivalentemente $\mathbf{R} \subseteq A \times A$), así que nosotros también pediremos esto, aunque no siempre lo diremos.

Notación.

$$\begin{array}{rcl} a\mathbf{R}b & \rightleftharpoons & \langle a,b\rangle \in \mathbf{R}. \\ a\not\mathbf{R}b & \rightleftharpoons & \langle a,b\rangle \notin \mathbf{R}. \\ \mathbf{R}\restriction_A & = & \mathbf{R}\cap(A\times A). \end{array}$$

Relacionales reflexivas sobre A.

Definición 1. Sean A una clase y $\mathbf{R}$ una relacional tal que $\mathbf{R} \subseteq A \times A$. Decimos que $\mathbf{R}$ es *reflexiva sobre A* si y sólo si $\forall x \in A\,(x\mathbf{R}x)$, o bien:

$$\forall x\,(x \in A \longrightarrow x\mathbf{R}x).$$

Id_A es un ejemplo clásico de relacional reflexiva sobre A, como también lo es $A\times A$. La relación $\leq$ es reflexiva sobre $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, según sea el caso). También podemos hablar de la relación de divisibilidad, $|$, sobre $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$.

Si $\mathbf{R},\mathbf{S}$ son relacionales, $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S} \subseteq A \times A$ y $\mathbf{R}$ es reflexiva sobre A, se tiene que $\mathbf{S}$ es reflexiva sobre A. Si además $B \subseteq A$, $\mathbf{R}$ es reflexiva sobre B[1]. Sin embargo, que una relacional sea reflexiva sobre una clase no implica que lo sea sobre las supraclases de ésta.

Ejemplos. La relación $\mathbf{R} := \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ es reflexiva sobre $\{1,2\}$, pero **no** es reflexiva sobre $\{1,2,3\}$.

Además, $\mathbf{S} := \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\} \subseteq \mathbf{R}$, pero $\mathbf{S}$ **no** es reflexiva sobre $\{1,2\}$, pues $2\not\mathbf{S}2$.

A continuación enunciamos el criterio para ver que una relacional es reflexiva sobre una clase.

[1] Esto se resume diciendo que la reflexividad sobre una clase se hereda a suprarrelaciones y que una relación que es reflexiva sobre una clase también lo es (al restringirla) sobre las subclases de ésta última.

Teorema 1. Sean $\mathbf{R}$ una relacional y A una clase tal que $\mathbf{R} \subseteq A \times A$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

i. $\mathbf{R}$ es reflexiva sobre A.

ii. $\mathbf{R}^{-1}$ es reflexiva sobre A.

iii. $Id_A \subseteq \mathbf{R}$.

iv. $Id_A \subseteq \mathbf{R}^{-1}$.

A partir de este resultado, es inmediato que la única relacional reflexiva sobre $\emptyset$ es $\emptyset$.

Como ya vimos, siempre hay relacionales reflexivas triviales para una clase A, una de las cuales cumple con una noción de minimalidad; Id_A es la $\subseteq$–menor relacional reflexiva sobre A, es decir; si $\mathbf{R}$ es una relacional reflexiva sobre A, entonces $Id_A \subseteq \mathbf{R}$.

También hay una que cumple una noción de maximalidad; $A \times A$ es la $\subseteq$–mayor relacional reflexiva sobre A, de entre todas las que estan contenidas en $A \times A$.

Retomando las nociones de minimalidad, es interesante saber si hay una relacional $\subseteq$–mínima que contenga a una fija y que además sea reflexiva sobre una clase dada.

Teorema 2. Cerradura reflexiva. Sean A una clase y $\mathbf{R}, \mathbf{S} \subseteq A \times A$ relacionales.

- $\mathscr{CR}(\mathbf{R}) := \mathbf{R} \cup Id_A$ es una relacional reflexiva sobre A.
- Si $\mathbf{S}$ es una relacional reflexiva sobre A y $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$, $\mathscr{CR}(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{S}$.

Es decir, $\mathscr{CR}(\mathbf{R})$[2] es la $\subseteq$–menor relacional reflexiva sobre A que contiene a $\mathbf{R}$.

Teorema. Sea $\mathbf{R}$ una relacional y A una clase.

$$\mathscr{CR}(\mathbf{R}) \in \mathbf{V} \iff \mathbf{R} \in \mathbf{V} \;\&\; A \in \mathbf{V}.$$

Proposición 1. Sea $a \in \mathbf{V}$ y $\mathbf{r} \subseteq a \times a$ una relacional[3]. Definamos la clase X como

$$X := \{\mathbf{s} : \mathbf{s} \subseteq a \times a \;\&\; \mathbf{s} \text{ es relación reflexiva sobre } a \;\&\; \mathbf{r} \subseteq \mathbf{s}\}$$

Se tienen las siguientes afirmaciones:

† $\bigcap X \in \mathbf{V}$.

† $\mathbf{r} \subseteq \bigcap X$.

† $\bigcap X$ es una relación reflexiva sobre a.

†† $\mathscr{CR}(\mathbf{r}) = \bigcap X$.

Demostración. $a \times a \in X \implies \bigcap X \in \mathbf{V}$. Para toda $\mathbf{s} \in X$, se tiene que $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{s}$ y (como $\mathbf{s}$ es reflexiva sobre A) $Id_A \subseteq \mathbf{s} \implies \mathbf{r} \subseteq \bigcap X \;\&\; Id_A \subseteq \bigcap X$.
Por el teorema **2** y los dos incisos anteriores se sigue que $\mathscr{CR}(\mathbf{r}) \subseteq \bigcap X$.
$\mathscr{CR}(\mathbf{r}) \in X \implies \bigcap X \subseteq \mathscr{CR}(\mathbf{r})$.

$\dashv$

[2]Más aún, resulta ser única, por lo que la llamamos *la cerradura (o clausura) reflexiva de* $\mathbf{R}$ *sobre* A o bien *la relacional reflexiva sobre* A *generada por* $\mathbf{R}$.

[3]¿Porqué $\mathbf{r}$ es conjunto?

Relacionales irreflexivas sobre A.

Definición 2. Decimos que una relacional $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ es *irreflexiva sobre* A[4] si y sólo si $\forall x \in A \left(x \not\mathbf{R} x \right)$, o bien

$$\forall x \left(x \in A \longrightarrow x \not\mathbf{R} x \right).$$

Los ejemplos comúnes son las relaciones $<$, $>$ sobre $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, o $\mathbb{R}$, según sea el caso). Por otra parte, $\mid$ no es irreflexiva sobre $\mathbb{N}$ ni sobre $\mathbb{Z}$. Una gráfica o grafo, tal como se entiende en Teoría de Gráficas, es muestra de una relación, la adyacencia, irreflexiva sobre un conjunto (los puntos de la gráfica).

Además, si $\mathbf{R}, \mathbf{S} \subseteq A \times A$, $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$ y $\mathbf{S}$ es irreflexiva sobre A, se tiene que $\mathbf{R}$ es irreflexiva sobre A. Si además $B \subseteq A$, $\mathbf{S} \restriction_{\mathbf{B}}$ es irreflexiva sobre B[5].

Ejemplos. En $A = \{1,2,3\}$ tenemos que: $\mathbf{R} := \{\langle 1,3 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$ es irreflexiva sobre A, pero $\mathbf{S} := \{\langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle\}$ **no** es irreflexiva sobre A.

Teorema 3. Sea A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional. Son equivalentes:

i. $\mathbf{R}$ es irreflexiva sobre A.

ii. $\mathbf{R}^{-1}$ es irreflexiva sobre A.

iii. $\mathbf{R} \cap Id_A = \emptyset$ (o bien $\mathbf{R}^{-1} \cap Id_A = \emptyset$).

Es fácil ver que $\emptyset$ es irreflexiva sobre cualquier clase y que $\mathbf{R} \setminus Id_{CMP(\mathbf{R})}$ es una relacional irreflexiva sobre $CMP(\mathbf{R})$. Además, *bajo* **ABF**, $\in$ es irreflexiva sobre $\mathbf{V}$.

Tarea. Si $\mathbf{R}$ es reflexiva e irreflexiva sobre A, entonces $A = \emptyset$. Es decir, una relacional sobre una clase no vacía puede tener a lo más una de las dos características mencionadas, aunque no necesariamente alguna de ellas.

Teorema 4. Sea A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional.

$$\mathbf{R} \text{ es reflexiva sobre } A \iff A^2 \setminus \mathbf{R} = \{\langle x,y \rangle : \langle x,y \rangle \notin \mathbf{R}\} \text{ es irreflexiva sobre } A.$$

[4]También se usan las expresiones “arreflexiva sobre A”, “antirreflexiva sobre A” o “aliorrelativa sobre A”.

[5]Esto se resume diciendo que la irreflexividad sobre una clase se hereda a subrelaciones y que una relación que es reflexiva sobre una clase también lo es sobre las subclases de ésta última.

Relacionales simétricas sobre A.

Definición 3. Una relacional $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ es *simétrica sobre* A si y sólo si

$$\forall x, y \in A \left(x\mathbf{R}y \longrightarrow y\mathbf{R}x \right).$$

Id_A, $A \times A$, $\emptyset$ son los ejemplos típicos de relacionales simétricas sobre una clase A. Por otra parte, $\leq$ **no** es simétrica sobre $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, según sea el caso), del mismo modo que $|$ **no lo es** sobre $\mathbb{N}$ ni sobre $\mathbb{Z}$.

Observaciones. Dadas A,B clases y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional:

✂ Si $\mathbf{R}$ es simétrica sobre A y $B \subseteq A$, entonces $\mathbf{R}$ es simétrica sobre B[6].

Teorema 5. Sean A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional. Son equivalentes las siguientes afirmaciones.

i . $\mathbf{R}$ es simétrica sobre A.

ii. $\mathbf{R^{-1}}$ es simétrica sobre A.

iii. $\mathbf{R} = \mathbf{R^{-1}}$.

iv. $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R^{-1}}$.

Teorema 6. Cerradura simétrica. Sean A una clase y $\mathbf{R}, \mathbf{S} \subseteq A \times A$ relacionales.

- $\mathscr{C}\mathscr{S}\left(\mathbf{R}\right) := \mathbf{R} \cup \mathbf{R^{-1}}$ es una relacional simétrica sobre A.
- Si $\mathbf{S}$ es una relacional simétrica sobre A y $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$, $\mathscr{C}\mathscr{S}\left(\mathbf{R}\right) \subseteq \mathbf{S}$.

Es decir, $\mathscr{C}\mathscr{S}\left(\mathbf{R}\right)$[7] es la $\subseteq$–menor relacional simétrica sobre A que contiene a $\mathbf{R}$.

Demostración. Para el primer inciso sean $\underline{x, y \in A}$ tales que $\langle x, y \rangle \in \mathscr{C}\mathscr{S}\left(\mathbf{R}\right)$. Tenemos dos casos:
$xRy \iff yR^{-1}x \implies \langle y, x \rangle \in \mathscr{C}\mathscr{S}\left(\mathbf{R}\right)$.
El segundo caso, $y\mathbf{R^{-1}}x$, es análogo.

Para el segundo inciso, basta mostrar que $\mathbf{R^{-1}} \subseteq \mathbf{S}$:
$u\mathbf{R^{-1}}v \iff v\mathbf{R}u \implies$(pues $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$) $v\mathbf{S}u \implies$($\mathbf{S}$ es simétrica sobre A) $u\mathbf{S}v$. ⊣

Teorema. Sean A una clase y $\mathbf{R}$ una relacional.

$$\mathscr{C}\mathscr{S}\left(\mathbf{R}\right) \in \mathbf{V} \iff \mathbf{R} \in \mathbf{V} \;\&\; A \in \mathbf{V}.$$

Proposición 2. Sea $a \in \mathbf{V}$ y $\mathbf{r} \subseteq a \times a$ una relación[8]. Definamos la clase X' como

$$X' := \left\{ \mathbf{s} : \mathbf{s} \subseteq a \times a \;\&\; \mathbf{s} \text{ es relación simétrica sobre } a \;\&\; \mathbf{r} \subseteq \mathbf{s} \right\}$$

Se tiene que:

---

[6] Que una relacional sea simétrica sobre una clase, se hereda a a las subclases de ella.

[7] Más aún, resulta ser única, por lo que la llamamos *la cerradura (o clausura) simétrica de* $\mathbf{R}$ *sobre* A o bien *la relacional simétrica sobre A generada por* $\mathbf{R}$.

[8] ¿Porqué $\mathbf{r}$ es conjunto?

† $\bigcap X' \in \mathbf{V}$.

† $\mathbf{r} \subseteq \bigcap X'$.

† $\bigcap X'$ es una relación simétrica sobre a.

†† $\mathscr{CS}(\mathbf{r}) = \bigcap X'$.

Demostración. $a \times a \in X' \implies \bigcap X' \in \mathbf{V}$. Para toda $x \in X'$, $\mathbf{r} \subseteq x \implies \mathbf{r} \subseteq \bigcap X'$.

$x, y \in A$ & $\langle x, y\rangle \in \bigcap X' \iff x, y \in A$ & $\forall \mathbf{s} \in X' (\langle x, y\rangle \in \mathbf{s}) \implies$(Pues toda $\mathbf{s} \in X'$ es simétrica sobre A) $\forall \mathbf{s} \in X' (\langle y, x\rangle \in \mathbf{s}) \iff \langle y, x\rangle \in \bigcap X'$. Por los dos incisos anteriores y el teorema **6**, $\mathscr{CS}(\mathbf{r}) \subseteq \bigcap X'$. $\mathscr{CS}(\mathbf{r}) \in X' \implies \bigcap X' \subseteq \mathscr{CS}(\mathbf{r})$. ⊣

Teorema 7. Sea A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional.

$$\mathbf{R} \text{ es simétrica sobre } A \iff A^2 \setminus \mathbf{R} \text{ es simétrica sobre } A.$$

Demostración. $A^2 \setminus \mathbf{R}$ **no** es simétrica sobre $A \iff \exists x, y \in A \left(x(A^2 \setminus \mathbf{R})y \;\&\; y\cancel{(A^2 \setminus \mathbf{R})}x\right)$ $\iff \exists x, y \in A \left(x\cancel{\mathbf{R}}y \;\&\; y\mathbf{R}x\right) \iff \exists x, y \in A \left(y\mathbf{R}x \;\&\; x\cancel{\mathbf{R}}y\right) \iff \mathbf{R}$ no es simétrica sobre A. ⊣

Relacionales asimétricas sobre A.

Definición 4. Una relacional $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ es *asimétrica sobre A* si y sólo si

$$\forall x, y \in A \left(x\mathbf{R}y \longrightarrow y\cancel{\mathbf{R}}x\right).$$

Dicho de otra manera $\neg\exists x, y \in A \left(x\mathbf{R}y \;\&\; y\mathbf{R}x\right)$.

$\leq$ no es una relación asimétrica sobre $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), pero $<$ sí lo es. $\mid$ tampoco lo es sobre $\mathbb{N}$, pero $\mid \setminus Id_{\mathbb{N}}$ sí es asimétrica sobre $\mathbb{N}$[9].

Observaciones. Dadas A,B clases y relacionales $\mathbf{R}, \mathbf{S} \subseteq A \times A$.

✂ Si $\mathbf{R}$ es asimétrica sobre A y $B \subseteq A$, entonces $\mathbf{R} \restriction_B$ es asimétrica sobre B[10].

✂ Si $\mathbf{R}$ es asimétrica sobre A y $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}$, entonces $\mathbf{S}$ es asimétrica sobre A[11].

✂ Si $\mathbf{R}$ es asimétrica sobre A, entonces $\mathbf{R}$ es irreflexiva sobre A.

Demostración. Ejercicio. ⊣

Teorema 8. Sean A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional. Son equivalentes:

i. $\mathbf{R}$ es asimétrica sobre A.

ii. $\mathbf{R}^{-1}$ es asimétrica sobre A.

iii. $\mathbf{R}^{-1} \subseteq A^2 \setminus \mathbf{R}$.

[9] ¿Ocurre lo mismo con $\mid \setminus Id_{\mathbb{Z}}$ sobre $\mathbb{Z}$?

[10] Que una relacional sea asimétrica sobre una clase, se hereda a a las subclases de ella.

[11] La característica de ser asimétrica sobre una clase se hereda a subrelaciones (sobre la misma clase).

No es difícil ver que $\emptyset$ es asimétrica sobre cualquier clase y que $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^{-1}$ es asimétrica sobre $CMP(\mathbf{R})$. Aún más, *bajo* **ABF**, $\in$ es asimétrica sobre **V**.

Tarea. Sean A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$, ¿son ciertas las siguientes afirmaciones?

- Si $\mathbf{R}$ es simétrica y asimétrica sobre A, entonces $A = \emptyset$ o $\mathbf{R} = \emptyset$[12].
- $\subseteq$ es asimétrica sobre A si y sólo si $A = \emptyset$.

Relacionales antisimétricas sobre A.

Definición 5. Sea A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional. Decimos que $\mathbf{R}$ es *antisimétrica sobre A* si y sólo si

$$\forall x, y \in A \left(x\mathbf{R}y \ \&\ y\mathbf{R}x \longrightarrow x = y \right).$$

La relación $\mid$ es antisimétrica sobre $\mathbb{N}$, más no sobre $\mathbb{Z}$.

Observaciones. Dadas A, B clases y $\mathbf{R}, \mathbf{S} \subseteq A \times A$ relacionales.

- Si $\mathbf{R}$ es antisimétrica sobre A y $B \subseteq A$, $\mathbf{R} \restriction_B$ es antisimétrica sobre B[13].
- Si $\mathbf{R}$ es antisimétrica sobre A y $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ es antisimétrica sobre A[14].

Teorema 9. Sean A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional. Son equivalentes:

i. $\mathbf{R}$ es antisimétrica sobre A.

ii. $\mathbf{R}^{-1}$ es antisimétrica sobre A.

iii. $\mathbf{R} \cap \mathbf{R}^{-1} \subseteq Id_A$.

Relacionales transitivas sobre A.

Definición 6. Decimos que la relacional $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ es *transitiva sobre A* si y sólo si

$$\forall x.y.z \in A \left(x\mathbf{R}y \ \&\ y\mathbf{R}z \longrightarrow x\mathbf{R}z \right).$$

Por ejemplo, $\leq$ y $<$ son transitivas sobre $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$); $\mid$ es transitiva sobre $\mathbb{N}$ (y sobre Z); $\subseteq$ es transitiva sobre cualquier clase. Por otra parte, $\in$ no es transitiva sobre $\left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\right\}$, pero sí lo es sobre $\left\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right\}$

Observaciones. Dadas A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional.

- Si $\mathbf{R}$ es transitiva sobre A y $B \subseteq A$, entonces $\mathbf{R} \restriction_B$ es transitiva sobre B[15].

[12] Es decir, una relacional no vacía sobre una clase no vacía puede tener a lo más una de las dos características mencionadas, aunque no necesariamente alguna de ellas

[13] Que una relacional sea antisimétrica sobre una clase, se hereda a a las subclases de ella.

[14] La característica de ser antisimétrica sobre una clase se hereda a subrelaciones (sobre la misma clase).

[15] Que una relacional sea transitiva sobre una clase, se hereda a a las subclases de ella.

✄ Si $\mathbf{R}$ es irreflexiva y transitiva sobre A, entonces $\mathbf{R}$ es asimétrica sobre A.

Teorema 10. Sean A una clase y $\mathbf{R}$ una relacional. Son equivalentes:

- $\mathbf{R}$ es transitiva sobre A.
- $\mathbf{R}^{-1}$ es transitiva sobre A.
- $\mathbf{R} \circ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}$.

Proposición 3. Sean $a \in \mathbf{V}$ y $\mathbf{r} \subseteq a \times a$ una relación[16]. Definamos la clase X'' como

$$X'' := \{\mathbf{s} : \mathbf{s} \subseteq a \times a \ \& \ \mathbf{s} \text{ es relación transitiva sobre } a \ \& \ \mathbf{r} \subseteq \mathbf{s}.\}$$

Se tienen las siguientes afirmaciones:

† $\bigcap X'' \in \mathbf{V}$.

† $\mathbf{r} \subseteq \bigcap X''$.

† $\bigcap X''$ es una relación transitiva sobre a.

†† Si $\mathbf{s} \subseteq a \times a$ es relacional transitiva sobre a y $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{s}$, entonces $\bigcap X'' \subseteq \mathbf{s}$.

Demostración. $a \times a \in X'' \implies \bigcap X'' \in \mathbf{V}$.
Para toda $\mathbf{s} \in X''$, se tiene que $\mathbf{r} \subseteq \mathbf{s} \implies \mathbf{r} \subseteq \bigcap X''$.
Sean $x, y, z \in a$. $\langle x, y \rangle \in \bigcap X''$ & $\langle y, z \rangle \in \bigcap X'' \iff \forall \mathbf{s} \in X'' (\langle x, y \rangle \in \mathbf{s} \ \& \ \langle y, z \rangle \in \mathbf{s})$
$\implies \forall \mathbf{s} \in X'' (\langle x, z \rangle \in \mathbf{s})$ (pues toda $\mathbf{s} \in X''$ es transitiva sobre a y $x, y, z \in a$).
$\iff \langle x, z \rangle \in \bigcap X''$.
El último inciso es consecuencia de que $\mathbf{s} \in X''$. ⊣

Relacionales antitransitivas sobre A.

Definición 7. Una relacional $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ es *antitransitiva sobre A*[17] si y sólo si

$$\forall x.y.z \in A \left(x\mathbf{R}y \ \& \ y\mathbf{R}z \longrightarrow x\not\mathbf{R}z\right).$$

Relacionales dicotómicas sobre A.

Definición 8. Una relacional $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ es *dicotómica sobre A* si y sólo si

$$\forall x, y \in A \left(x\mathbf{R}y \ \vee \ y\mathbf{R}x\right).$$

Relaciones tricotómicas sobre A.

Definición 9. Una relacional $\mathbf{R}$ es *tricotómica sobre A* si y sólo si

$$\forall x, y \in A \left(x\mathbf{R}y \ \vee \ y\mathbf{R}x \ \vee \ x = y\right).$$

[16] ¿Porqué $\mathbf{r}$ es conjunto?
[17] Leáse también como "*intransitiva sobre A*".