Ejemplos

Naim Nuñez Morales.

17 de octubre de 2014

Resumen

En estas notas abordaremos dos ejemplos sobre preordenes y ordenes totales estrictos.

Recordemos que

$$^{a}b := \left\{ f \in FUNC : DOM(f) = a \ \& \ IMG(f) \subseteq b \right\}$$

1. La *Casi dominancia* en $^{\omega}\omega$

Definición 1. Sean $f, g \in {}^{\omega}\omega$, decimos que *$g$ casi domina a f* o que *f es menor o igual que g casi siempre* si y sólo si $\exists n \in \omega \forall m \in \omega \big(n \leq m \longrightarrow f(m) \leq g(m) \big)$.

Denotamos lo anterior como $f \preccurlyeq^{*} g$. De esta forma

$$f \preccurlyeq^{*} \Longleftrightarrow \exists n \in \omega \forall m \in \omega \big(n \leq m \longrightarrow f(m) \leq g(m) \big)$$

Lo que decimos en la definición anterior es que dos funciones del conjunto dado están $\preccurlyeq^{*}$–relacionadas si a partir de cierto momento una de ellas le gana a la otra.

Veamos que propiedades de orden satisface esta relación:

- ✓ $\preccurlyeq^{*}$ es reflexiva sobre $^{\omega}\omega := A$, pues dada cualquier $f \in A$, $0 \in \omega$ y para todo natural n, $f(n) \leq f(n)$.

- ✂ $\preccurlyeq^{*}$ no es irreflexiva sobre A.

- ✓ $\preccurlyeq^{*}$ es transitiva sobre A. Dadas $f, g, h \in A$, tales que $f \preccurlyeq^{*} g$ y $g \preccurlyeq^{*} h$, yimos en clase que el existencial que requerimos se satiface con el mayor de los testigos de las hipótesis.

✓ $\langle {}^{\omega}\omega, \preccurlyeq^* \rangle \in$ **PRE**. Basta recordar que ${}^{a}b$ es conjunto.

✂ $\preccurlyeq^*$ no es simétrica sobre A, pues

$$f := \{\langle n,n\rangle : n\in\omega\} \preccurlyeq^* \{\langle n,n^+\rangle : n\in\omega\} := g$$

pero es fácilmente refutable[1] que $g \preccurlyeq^* f$.

✂ $\preccurlyeq^*$ no es asimétrica sobre A.

✂ $\preccurlyeq^*$ no es antisimétrica sobre A, pues

$$f := \{\langle 0,0\rangle, \langle n^+,n\rangle : n\in\omega\} \preccurlyeq^* \{\langle 0,1\rangle, \langle n^+,n\rangle : n\in\omega\} := g$$

y

$$\{\langle 0,1\rangle, \langle n^+,n\rangle : n\in\omega\} \preccurlyeq^* \{\langle 0,0\rangle, \langle n^+,n\rangle : n\in\omega\}$$

pero $f \neq g$.

✂ $\preccurlyeq^*$ no es dicotómica sobre A, pues si

$$f := \{\langle 2n,0\rangle, \langle 2n+1,1\rangle : n\in\omega\}$$

y si

$$g := \{\langle 2n,1\rangle, \langle 2n+1,0\rangle : n\in\omega\}$$

se tiene que **ni** $g \preccurlyeq^* f$, **ni** $f \preccurlyeq^* g$.

✂ $\preccurlyeq^*$ no es tricotómica sobre A.

Ahora ya tenemos dos ejemplos de preórdenes que no son ni órdenes parciales ni relaciones de equivalencia; a saber:

- $\langle \mathbb{Z}, | \rangle$.
- $\langle {}^{\omega}\omega, \preccurlyeq^* \rangle$.

[1] ¡Inténtelo! Es un buen ejercicio.