Ejemplos

Naim Nuñez Morales.

10 de noviembre de 2014

Resumen

En estas notas abordaremos dos ejemplos sobre preordenes y ordenes totales estrictos.

Recordemos que

$$^{a}b := \left\{ f \in FUNC : DOM(f) = a \ \& \ IMG(f) \subseteq b \right\}$$

1. Un orden denso para las sucesiones finitas binarias.

Ahora vamos a trabajar con "palabritas" de 0's y 1's.

Definición 1. Sea $\sigma \in FUNC$. Decimos que σ es una *sucesión binaria finita* si y sólo si $\exists n \in \omega \left(\sigma \in {}^{n}2 \right)$. Esto equivale a decir que $DOM(\sigma) \in \omega \ \& \ IMG(\sigma) \subseteq 2$.

En tal caso, diremos que n es la longitud de la sucesión, lo que denotaremos por $\ell(\sigma)$.

Ejemplos. Veamos algunos ejemplos de funciones que **no** son sucesiones binarias finitas y otros que si:

- $f = \left\{ \langle 0,0 \rangle, \langle 1,5 \rangle \right\}$ no es una sucesión binaria finita, pues $IMG(f) := \left\{ 0,5 \right\} \nsubseteq 2$.
- $f = \left\{ \langle 0,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle \right\}$ no es una sucesión binaria finita, pues $DOM(f) := \left\{ 0,3 \right\} \notin \omega$.

- $\sigma = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 4,1\rangle\}$ es una sucesión binaria finita con $\ell(\sigma) = 5$. Siguiendo la notación establecida por El Profesor, tenemos que:

$$\sigma = \langle 0,0,1,0,1\rangle$$

- $\emptyset$ también es una sucesión binaria finita. De hecho ${}^{0}2 = \{\emptyset\}$

Como ya hemos visto con anterioridad, para cada $n \in \omega$, ${}^{n}2$ es un conjunto, No es difícil ver que
$$\left\{{}^{0}2, {}^{1}2, {}^{2}2, {}^{3}2, {}^{4}2, {}^{5}2, \dots\right\}$$
es una clase[1], pero **¿es conjunto?**[2].

Ahora hablemos de su unión,

$$\overset{\omega}{\smile}2 := \bigcup\left\{{}^{n}2 : n \in \omega\right\}.$$

al que llamaremos el conjunto de todas las sucesiones binarias finitas. En este conjunto vamos a definir un orden:

$$\sigma_1 \prec \sigma_2 \iff \begin{cases} \sigma_2 \subsetneq \sigma_1 \ \& \ \sigma_1(\ell(\sigma_2)) = 0 \\ \sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \ \& \ \sigma_2(\ell(\sigma_1)) = 1 \\ \sigma_2 \not\subseteq \sigma_1 \ \& \ \sigma_1 \not\subseteq \sigma_2 \ \& \ \sigma_1(n_0) = 0 \\ \text{donde } n_0 = \text{mín}\left\{n \in \omega : \sigma_1(n) \neq \sigma_2(n)\right\} \end{cases}$$

Veamos algunas cosas que cumple esta relación:

- $\prec$ es irreflexiva sobre $\overset{\omega}{\smile}2$, pues para una secuencia finita σ, ninguno de los tres casos es posible.

- $\prec$ es transitiva sobre $\overset{\omega}{\smile}2$. Queda como ejercicio.

- $\prec$ es tricotómica sobre $\overset{\omega}{\smile}2$, pues para dos secuencias finitas σ_1, σ_2 distintas, se tienen los siguientes casos:

  - $DOM(\sigma_1) = DOM(\sigma_2)$. Como las funciones son distintas, se puede tomar $n_0 = \text{mín}\left\{n \in \omega : \sigma_1(n) \neq \sigma_2(n)\right\}$. De donde se tiene uno de dos casos; $\sigma_1(n_0) = 0$ o $\sigma_2(n_0) = 0$.

[1] Como ejercicio, hay que dar la fórmula que define a esta clase.

[2] En este momento ya debería quedar claro que si

  - $DOM(\sigma_1) < DOM(\sigma_2)$. Aquí tenemos de dos sopas: difieren o no en algún punto de $\ell(\sigma_1)$. De no diferir, se da el caso que $\sigma_1 \subsetneq \sigma_2$ y en el otro caso se sigue como en el anterior.
  - $DOM(\sigma_2) < DOM(\sigma_1)$. Se sigue de manera análoga al anterior.

- $\prec$ ordena densamente a ${}^{\underset{\smile}{\omega}}2$. Queda como ejercicio.