Naim Nuñez Morales.

20 de septiembre de 2014

Resumen

Se entregan todos los que dicen **ejercicio** (FALTA UNO). Los problemas opcionales se entregan en caso que quieran tener puntos de mas, y a lo mas se pueden entregar dos.

La finalidad del siguiente ejercicio es ver que si es posible definir el par ordenado de manera distinta a la vista en clase. Recuerde que para que un conjunto "$\langle x,y\rangle_0$" pueda tomar el papel de un par ordenado basta que cumpla:

$$\forall u,v,u',v' \left(\langle u,v\rangle_0 = \langle u',v'\rangle_0 \longrightarrow u=u' \ \& \ v=v'\right).$$

Ejercicio 1. Identifique (y justifique) cuáles de los siguientes conjuntos sirven como pares ordenados:

- $\langle a,b\rangle_1 := \Big\{\big\{\{a\},\emptyset\big\},\big\{\{b\}\big\}\Big\}$.
- $\langle a,b\rangle_2 := \Big\{\big\{a,\emptyset\big\},\big\{b,\{\emptyset\}\big\}\Big\}$.
- $\langle a,b\rangle_3 := \Big\{\{a\},\{b,\emptyset\}\Big\}$.

Problema. Este ejercicio es opcional. Sean $\mathbf{R}$ una relacional y A, B clases. Demuestre las siguientes afirmaciones y resuelva las preguntas que se plantean.

- $\mathbf{R}\left[\bigcup A\right] = \bigcup\left\{\mathbf{R}[x] : x \in A\right\}$.
- Si $A \neq \emptyset$, $\mathbf{R}\left[\bigcap A\right] \subseteq \bigcap\left\{\mathbf{R}[x] : x \in A\right\}$. ¿La contención es propia? ¿Qué pasa si $A=\emptyset$?
- $\mathbf{R}\left[A \setminus B\right] \supseteq \mathbf{R}[A] \setminus \mathbf{R}[B]$. ¿La contención es propia?

Ejercicio 2. Sean F y G funcionales. Demuestre que son equivalentes:

- $F = G$.

- $DOM(F) = DOM(G)$ & $\forall x \in DOM(F)\Big(F(x) = G(x)\Big)$.

Ejercicio 3. Sea F una funcional. Demuestre que F^{-1} es funcional si y sólo si F es inyectiva.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{b}$ una función. Demuestre las siguientes proposiciones:

- f es inyectiva si y sólo si para todo conjunto $\mathbf{c}$ y cualesquiera funciones $g_1 : \mathbf{c} \longrightarrow \mathbf{a}$, $g_2 : \mathbf{c} \longrightarrow \mathbf{a}$; si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, entonces $g_1 = g_2$.
- f es sobre $\mathbf{b}$ si y sólo si para todo conjunto $\mathbf{c}$ y cualesquiera funciones $g_1 : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{c}$, $g_2 : \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{c}$; si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, entonces $g_1 = g_2$.

OJO: No use que f tiene inversa de algún lado.

Problema. Este ejercicio es opcional. Sean $\mathbf{x} \neq \emptyset, \mathbf{y}$ conjuntos y $f : \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}$ una función. Demuestre las siguientes afirmaciones.

- f es inyectiva si y sólo si hay una función $g : \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x}$[1], tal que $g \circ f = Id_{\mathbf{x}}$.
- Si hay una función $h : \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x}$[2], tal que $f \circ h = Id_{\mathbf{y}}$, entonces f es sobre $\mathbf{y}$. ¿Qué se puede decir sobre el regreso?

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{F}$ un sistema compatible de funciones. Demuestre las siguientes afirmaciones.

1. $\bigcup \mathscr{F}$ es una funcional.

  a) $DOM(\bigcup \mathscr{F}) = \bigcup \Big\{DOM(f) : f \in \mathscr{F}\Big\}$.

  b) $IMG(\bigcup \mathscr{F}) = \bigcup \Big\{IMG(f) : f \in \mathscr{F}\Big\}$.

2. Para cualesquiera conjuntos x, y, se tiene que

$$\langle x, y\rangle \in \bigcup \mathscr{F} \longleftrightarrow \exists f \in \mathscr{F}\big(\langle x, y\rangle \in f\big),$$

o bien,

$$\Big[x \in DOM\Big(\bigcup \mathscr{F}\Big) \ \& \ \Big(\bigcup \mathscr{F}\Big)(x) = y\Big] \longleftrightarrow \exists f \in \mathscr{F}\Big[x \in DOM(f) \ \& \ f(x) = y\Big]$$

[1]A una función g con estas características se le llama *una inversa izquierda de f*.
[2]A una función h con estas características se le llama *una inversa derecha de f*.

Problema. Este ejercicio es opcional. Sean $f:\mathbf{a}\longrightarrow\mathbf{c}$ y $g:\mathbf{a}\longrightarrow\mathbf{b}$ funciones. Demuestre que son equivalentes:

i) Hay una función $h:\mathbf{b}\longrightarrow\mathbf{c}$ tal que $f=h\circ g$.

ii) Para cada $x,y\in\mathbf{a}$; si $g(x)=g(y)$, entonces $f(x)=f(y)$.

Ejercicio 6. Sean A una clase y $\mathbf{R}\subseteq A\times A$ una relacional reflexiva y antisimétrica sobre A. Son equivalentes:

- $\mathbf{R}$ es un orden total [reflexivo] sobre A.
- $\mathbf{R}$ y $(A\times A)\setminus\mathbf{R}$ son transitivas sobre A.

Ejercicio 7. Sean A una clase y $\mathbf{R}\subseteq A\times A$ una relacional transitiva sobre A. Son equivalentes:

- $\mathbf{R}$ es un orden lineal [reflexivo] sobre A.
- $(A\times A)\setminus\mathbf{R}=\mathbf{R}^{-1}\setminus Id_A$.

Ejercicio 8. Sean a un conjunto y $\mathscr{F}\neq\emptyset$ una colección cuyos elementos son órdenes parciales estrictos sobre a. ¿Es cierto que $\bigcap\mathscr{F}$ es un orden parcial estricto sobre a?

Ejercicio 9. Suponga que $\mathbb{R}$ es conjunto.

- Demuestre que ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, la clase de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es conjunto.
- Sean $f,g\in{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. Definimos

  $$f\leqslant g\iff\forall x\in\mathbb{R}\big(f(x)\leq g(x)\big)$$

  Desmuestre que $\left\langle{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R},\leqslant\right\rangle$**COPO**. ¿Es **COTO**?
- Sean $f,g\in{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. Muestre que $\{f,g\}$ tiene $\leqslant$-supremo y $\leqslant$-ínfimo (exhiba quiénes deben ser y justifique porqué deben ser esos).
- Describa los intervalos (f,g) y (h,f), donde $f(x)=0$ (f es la constante 0), $g(x)=x^2$ y $h(x)=x^3$.

Ejercicio 10. Demuestre las equivalencias de “n es un número natural” (Proposición 1 de las notas 3.01 de El Profesor).

Ejercicio 11. Demuestre con todo rigor el inciso iii) de la Proposición 2 de las notas 3.02 de El Profesor (Contrucción de ω, 2^a parte).

Ejercicio 12. En este ejercicio hay que resolver la cuestión de la inyectividad de la funcional sucesor dentro de la Teoría de Conjuntos.

Para ver que es inyectiva en **V**, requeriremos de un cañon; **ABF**. Sin embargo, hay casos particulares (la clase de los conjuntos transitivos) en que es posible dar una demostración con los axiomas básicos ($\mathbf{ZF_1}, \ldots, \mathbf{ZF_6}$).

(a) Suponga **ABF**. Demuestre las siguientes afirmaciones.

- La funcional sucesor $(\_)^+ : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ es inyectiva.
- El sucesor de un conjunto es un $\in$–sucesor inmediato, es decir;

$$\forall x \neg \exists y \left(x \in y \ \& \ y \in x^+ \right)$$

- La funcional sucesor no tiene puntos fijos, es decir;

$$\neg \exists x \left(x^+ = x \right)$$

(b) Abténgase de hacer uso de **ABF**. Demuestre:

- **Lema.**

$$\forall x \left(\bigcup x^+ = x \longleftrightarrow x \text{ es transitivo} \right)$$

- **Corolario.**

$$\forall x, y \left(x \neq y \ \& \ x, y \text{ son transitivos} \longrightarrow x^+ \neq y^+ \right)$$

Ejercicio 13. Establezca el siguiente teorema.

$$\forall x \neg \exists y \left(x \subsetneq y \ \& \ y \subsetneq x^+ \right)$$

Ejercicio 14. Recordatorio: Basándonos en que $\mathbb{N} = \omega$ y que $\mathbb{N}$ es inductivo, concluímos (en clase) que ω es un conjunto inductivo.

Pruebe directamente que ω, la intersección de todos los conjuntos inductivos, es también un conjunto inductivo.

Ejercicio 15. Demuestre por inducción las siguientes afirmaciones.

- La funcional sucesor es monótona para ω;

$$\forall x, y \in \omega \left[x \in y \longrightarrow x^+ \in y^+ \right]$$

- Cualquier natural es el cero o lo tiene como elemento;

$$\forall n \in \omega \left[n = 0 \vee 0 \in n \right]$$

equivalentemente;

$$\forall n \in \omega \left[n \neq 0 \longrightarrow 0 \in n \right]$$

- La funcional sucesor es inyectiva para ω;

$$\forall n, m \in \omega \left[n \neq m \longrightarrow n^+ \neq m^+ \right]$$

Ejercicio 16.

$$\forall n \in \omega \left[n = 0 \vee \exists m \left(m^+ = n \right) \right]$$

Note que al mostrar la existencia de m, es inmediato que $m \in \omega$.

Ejercicio 17.

$$\omega \neq 0 \;\&\; \neg \exists n \left(\omega = n^+ \right)$$