CONJUNTOS vs CLASES

Los **únicos** objetos que para nosotros "existen" son conjuntos –conjuntos puros– y queremos dar un sistema axiomático para este campo del conocimiento. Siendo congruentes con ello, los términos de nuestro lenguaje formal –de principio las variables, como términos indefinidos y posteriormente los definidos explícitamente– se interpretarán –o recorrerán, en el caso de las variables– sobre los conjuntos. Como sabemos, no toda propiedad define un conjunto, formalmente:

Si $\varphi(x)$ es una $\in$–fórmula, entonces

$$\left\{x \;/\; \varphi(x)\right\}$$

en general, no es un conjunto. p.e. con $\varphi(x) \rightleftharpoons (x \notin x)$ o $\varphi(x) \rightleftharpoons (x = x)$.

En cambio, si a es un conjunto y $\varphi(x)$ es una $\in$-fórmula, el Esquema de Comprensión nos garantiza la existencia de un conjunto, digamos b, cuyos elementos son aquellos miembros de a que cumplen con φ. En símbolos:

$$b = \left\{x \;/\; (x \in a) \;\&\; \varphi(x)\right\}$$

es un conjunto.

Sin embargo, es conveniente hacer uso de la notación:

$$\left\{x \;/\; \varphi(x)\right\}$$

Léase: *"La clase de todos los conjuntos que cumplen φ"*.

Como una ayuda a la intuición, una *Clase* es una colección de conjuntos, una colección *"definible"* de conjuntos, es la *"extensión"* de una fórmula. En la jerarquía acumulativa, podemos pensar a una clase como una colección de conjuntos —una colección de los ya construidos, de los ya terminados.

La introducción de clases *simplifica* nuestra notación y por ende podríamos prescindir de ella.

Observemos que *todo conjunto es una clase* pues,
Si a es un conjunto, la clase:

$$\left\{x \;/\; x \in a\right\}$$

coincide con el conjunto a.

Aquellas clases que **no** sean conjuntos las llamaremos *Clases Propias.* Y siendo consecuentes con esto, a las clases que sean conjuntos les llamaremos *Clases No–Propias* o *Impropias.*

Al tener en mente nuestra idea de la Jerarquía Acumulativa de conjuntos, podemos imaginar a una clase propia como, una colección de conjuntos que nunca se termina de construir, a semejanza –y no podría ser de otra forma– del universo de los conjuntos puros. ¿Cuándo sabemos, aquí en la Jerarquía, que una clase es impropia? La respuesta es sencilla, cuando ésta sea un conjunto, es decir cuando haya algún estrato en el cual ya estén todos sus elementos construidos.

La expresión: $\left\{x \ / \ \varphi(x)\right\}$, debe ser considerada *únicamente* como una conveniencia notacional, así si a es un conjunto,

“$a \in \left\{x \ / \ \varphi(x)\right\}$” es una forma más de decir, o escribir, “$\varphi(a)$”

En forma análoga, a veces, escribiremos $a \notin \left\{x \ / \ \varphi(x)\right\}$ en lugar de $\neg\varphi(a)$.

Y al afirmar que

$$\left\{x \ / \ \varphi(x)\right\} = \left\{y \ / \ \psi(y)\right\}$$

sólo afirmamos que

$$\forall w\left[\varphi(w) \leftrightarrow \psi(w)\right]$$

Notación: Abreviaremos expresiones de la forma $\left\{x \ / \ \varphi(x)\right\}$, es decir de clases, mediante letras mayúsculas: A, B, C, $\ldots$

¡**NO** confundir con variables o con metavariables para conjuntos! A no ser que sepamos que hay un conjunto cuyos elementos son exactamente aquellos que cumplen con la propiedad. Teniendo esto en mente, **no tiene sentido el escribir**:

$$A \in B$$

salvo el caso particular en que sepamos que A es un conjunto. Las clases **tienen** como elementos conjuntos y no clases propias: *No hay clases de clases propias.*

Usaremos la letra mayúscula “V” para denotar a la clase de todos los conjuntos:

$$V = \left\{x \ / \ x = x\right\}$$

V es una clase propia, la cual llamaremos *“El Universo”.*

Usaremos las expresiones:

$$a \in V,\ A \in V \text{ y } B \notin V$$

para decir que a y A son conjuntos y que la clase B es propia, es decir que B no es un conjunto, hablando con todo rigor, que B **no** existe.

Dentro de nuestra teoría formal ¿Cuándo una clase es un conjunto?

La clase $A = \left\{x \ / \ \varphi(x)\right\}$ será un conjunto si se puede probar, a partir de nuestros axiomas, cualquiera de las siguientes expresiones equivalentes:

$$\exists x\left(x = A\right)$$

$$\exists x \forall w\left[w \in x \leftrightarrow w \in A\right]$$

$$\exists x \forall w\left[w \in x \leftrightarrow \varphi(w)\right]$$

Otra manera sería probar que:

$$\exists x\left(A \in x\right)$$

Ahora bien, si tenemos a la mano el esquema axiomático de comprensión (**ZF**$_{\mathbf{6}}$), bastaría probar cualquiera de las siguientes:

$$\exists x\left(A \subseteq x\right)$$

$$\exists x \forall w\left[w \in A \rightarrow w \in x)\right]$$

$$\exists x \forall w\left[\varphi(w) \rightarrow w \in x\right]$$

Para terminar, de acuerdo con nuestra teoría, **ZF**, no hay clases propias, solo conjuntos. Forzando un poco las cosas podríamos decir que *las clases son sólo fórmulas, no objetos.*

Veamos algunas generalizaciones de nociones que son de conjuntos, para clases: Sean $A = \left\{x \ / \ \varphi(x)\right\}$ y $B = \left\{y \ / \ \psi(y)\right\}$ clases arbitrarias, tenemos que

1. $A \neq B \ \rightleftharpoons \ \exists w\left[w \in A \ \& \ w \notin B\right] \vee \exists w\left[w \notin A \ \& \ w \in B\right]$

$\rightleftharpoons \ \exists w\left[\varphi(w) \ \& \ \neg\psi(w)\right] \vee \exists w\left[\neg\varphi(w) \ \& \ \psi(w)\right]$

2. $A \subseteq B \rightleftharpoons \forall w\left[w \in A \rightarrow w \in B\right] \rightleftharpoons \forall w\left[\varphi(w) \rightarrow \psi(w)\right]$.

Diremos que A es *una Subclase de* B o que B es *una Supraclase de* A.

3. $A \cup B = \left\{w \ / \ w \in A \vee w \in B\right\} = \left\{w \ / \ \varphi(w) \vee \psi(w)\right\}$.

4. $A \cap B = \Big\{ w \ / \ w \in A \ \& \ w \in B \Big\} = \Big\{ w \ / \ \varphi(w) \ \& \ \psi(w) \Big\}.$

5. $A \setminus B = \Big\{ w \ / \ w \in A \ \& \ w \notin B \Big\} = \Big\{ w \ / \ \varphi(w) \ \& \ \neg\psi(w) \Big\}.$

6. $\bigcup A = \Big\{ w \ / \ \exists x(x \in A \ \& \ w \in x) \Big\} = \Big\{ w \ / \ \exists x(\varphi(w) \ \& \ w \in x) \Big\}.$

¿Podríamos hablar de $\wp(A)$? o ¿del $\{A\}$? La respuesta es **NO**. ¿Porqué?

Pasemos a dar la definición general de intersección para clases(!).

Definición. Sea A una clase arbitraria, así

$$\bigcap A = \Big\{ w \ / \ \forall x(x \in A \to w \in x) \Big\}$$

Proposición.

1. $\bigcap \emptyset = V$, y por tanto, $\bigcap \emptyset \notin V$ o bien, $\bigcap \emptyset$ no existe.

2. Si $A \neq \emptyset$, entonces $\bigcap A$ es el $\subseteq$–mayor conjunto contenido en todos los elementos de A. En símbolos:

a. $\bigcap A \in V$.

b. $\forall w \Big[w \in A \to \bigcap A \subseteq w \Big]$ y

c. $\forall x \Big[\forall w \Big(w \in A \to x \subseteq w \Big) \to x \subseteq \bigcap A \Big].$

Prueba: **Tarea**. †

TAREA. Sea $a \in V$. El complemento de a **NO** existe, en otras palabras

$$\Big\{ w \ / \ w \notin a \Big\} \notin V$$

Para que tenga algún sentido el complemento del conjunto a, éste debe ser subconjunto de algún otro conjunto, digamos b, y podremos hablar del *Complemento Relativo de a en o respecto a b* y será pues

$$\Big\{ w \ / \ w \in b \ \& \ w \notin a \Big\} = b \setminus a$$