Álgebra de Conjuntos

Par Ordenado.

Queremos definir lo que es el par ordenado de los conjuntos a y b, el cual simbolizaremos por: $\langle a, b\rangle$. Éste debe ser óbviamente un conjunto y para capturar la noción de ordenado debe cumplir con el hecho de que si c y d son conjuntos, entonces:

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \rightarrow a = c \ \& \ b = d$$

Hay varias maneras de hacer esto, nosotros optamos por la siguiente:

Definición$_1$. *Par Ordenado* (Kazimierz Kuratowski 1921).
Sean a y b conjuntos arbitrarios. Así,

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

La existencia de éste conjunto está garantizada por **ZF$_3$** y su unicidad por **ZF$_1$**.

Proposición$_1$. Sean $a, b, c, d \in V$. Así,

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \rightarrow a = c \ \& \ b = d$$

Prueba: Supongamos que $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$. Así pues,

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

por tanto, usando sólamente lógica, tienen los mismos elementos. Los casos se reducen a dos:

(**i**). $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$,

O bien,

(**ii**). $\{a\} = \{c, d\}$ y $\{a, b\} = \{c\}$.

En el caso (**i**) tenemos que $a = c$ y $b = d$. En el caso (**ii**) tenemos que $a = c = d = b$. En cualquier caso, tenemos lo que queríamos. †

Relacionales y Relaciones.

Definición$_2$. Una clase R es una *Relacional* syss sus elementos son pares ordenados:

$$\forall x \left[x \in R \rightarrow \exists y \exists z \left(\langle y, z\rangle = x \right) \right]$$

Una *Relación* es una relacional que es un conjunto.

De acuerdo con las observaciones que hicimos sobre las clases, las relacionales, en general, no existen. ¿Qué queremos decir, entonces, con que R es una relacional, si R es una clase propia? Bueno, pues si R es una clase, R está definido por una fórmula, digamos φ, así:

$$R = \left\{x \ / \ \varphi(x)\right\}$$

Afirmar que R es una relacional es, pues, afirmar que:

$$\forall x \left[\varphi(x) \rightarrow \exists y \exists z \Big(\langle y,z \rangle = x \Big) \right]$$

Ejemplos: Sea A una clase. Las siguientes son relacionales:

1. $\emptyset$.
2. $\left\{\left\langle x, y\right\rangle \ / \ x \in A \ \& \ y \in A\right\}$.
3. $Id_A = \left\{\left\langle x, x\right\rangle \ / \ x \in A\right\}$.
4. $\in_A \ = \left\{\left\langle x, y\right\rangle \ / \ x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ x \in y\right\}$.
5. $\subseteq_A \ = \left\{\left\langle x, y\right\rangle \ / \ x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ x \subseteq y\right\}$.

Definición$_3$. Sea R una relacional. El *Dominio,* la *Imagen (o Rango)* y el *Campo de* R se definen así:

1. $DOM(R) = \left\{x \ / \ \exists y\Big(\left\langle x, y\right\rangle \in R \Big)\right\}$.
2. $IMG(R) = \left\{y \ / \ \exists x\Big(\left\langle x, y\right\rangle \in R \Big)\right\}$.
3. $CMP(R) = \left\{z \ / \ z \in DOM(R) \vee z \in IMG(R)\right\} = DOM(R) \cup IMG(R)$.

Lema$_2$. Sea R una relacional. Así,

Si $\left\langle a, b\right\rangle \in R$, entonces $a,b \in \bigcup\bigcup R$

Prueba:

$$\begin{aligned} \left\langle a, b\right\rangle \in R \ &\leftrightarrow \ \left\{\{a\}, \left\{a, b\right\}\right\} \in R \\ &\rightarrow \ \{a\}, \left\{a, b\right\} \in \bigcup R \\ &\rightarrow \ a, b \in \bigcup\bigcup R \end{aligned}$$

†

Ejercicio: ¿ $CMP(R) = \bigcup\bigcup R$?

Proposición$_3$. Si r es una relación, entonces

$$DOM(r)\ ,\ IMG(r)\ ,\ CMP(r) \in V$$

Prueba: Si r es una relación, entonces r es una relacional que es un conjunto, e.d. $r \in V$. Por **ZF**$_4$ (usado dos veces) tenemos que $\bigcup\bigcup r \in V$. Ahora bien, como

$$DOM(r)\ ,\ IMG(r) \subseteq CMP(r) \subseteq \bigcup\bigcup r$$

por el esquema axiomático de comprensión, **ZF**$_6$, tenemos lo que queríamos. †

Definición$_4$. Sean A y B clases. Así,

$$A \times B = \left\{ \left\langle x, y \right\rangle \ / \ x \in A \ \&\ y \in B \right\}$$

Proposición$_4$. Si $a, b \in V$, entonces $a \times b \in V$.

Prueba: Si $\left\langle x, y \right\rangle \in a \times b$, entonces $x \in a$ y $y \in b$. Pero entonces,

$$\begin{aligned} x \in a \ \&\ y \in b \ &\rightarrow\ x\ ,\ y \in a \cup b \\ &\rightarrow\ \{x\}\ ,\ \left\{x, y\right\} \in \wp(a \cup b) \\ &\rightarrow\ \left\{ \{x\}\ ,\ \left\{x, y\right\} \right\} \in \wp(\wp(a \cup b)) \\ &\leftrightarrow\ \left\langle x, y \right\rangle \in \wp(\wp(a \cup b)) \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que $a, b \in V$, por **ZF**$_4$ y **ZF**$_5$, tenemos que $\wp(\wp(a \cup b)) \in V$. Tenemos entonces,

$$a \times b = \left\{ z \in \wp\left(\wp\left(a \cup b\right)\right) \ / \ \exists x \exists y \left(x \in a \ \&\ y \in b \ \&\ z = \left\langle x, y \right\rangle \right) \right\}$$

y será un conjunto, gracias a **ZF**$_6$. †

Observaciones.

- Si R es una relacional, entonces
$$R \subseteq DOM(R) \times IMG(R) \subseteq CMP(R) \times CMP(R)$$
- Si R es una relacional y $A = CMP(R)$, entonces $R \subseteq A \times A$

TAREA: Sean A y B clases. Así, $A \times B = \emptyset$ syss $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Definición$_5$. Sean R una relacional y A y B clases.

1. La *Imagen de A bajo R* es,
$$R[A] = \left\{ y \ / \ \exists x \left(x \in A \ \&\ \left\langle x, y \right\rangle \in R \right) \right\}$$

2. La *(Relacional) Inversa de R* es,
$$R^{-1} = \left\{ \left\langle y, x \right\rangle \ / \ \left\langle x, y \right\rangle \in R \right\}$$

3. La *Imagen Inversa de B bajo R* es la imagen de B bajo R^{-1} :

$$R^{-1}[B] = \{x \ / \ \exists y(y \in B \ \& \ \langle x, y \rangle \in R)\}$$

Proposición$_5$. Sea $R \subseteq A \times B.$ Así,

1. $R[A] = IMG(R)$ y $R^{-1}[B] = DOM(R).$
2. $DOM(R^{-1}) = IMG(R)$ e $IMG(R^{-1}) = DOM(R).$
3. $(R^{-1})^{-1} = R.$

Prueba: **Ejercicio**. †

Definición$_6$. Sean R y S relacionales. La *Composición de S con R,* o bien, R *Seguida de S,* queda definida como sigue:

$$S \circ R = \{\langle x, z \rangle \ / \ \exists y[\langle x, y \rangle \in R \ \& \ \langle y, z \rangle \in S]\}$$

Proposición$_6$. Sean R, S y T relacionales

1. $DOM(S \circ R) = R^{-1}[IMG(R) \cap DOM(S)] \ \left(= R^{-1}[\ DOM(S)\ ]\right)$
2. $IMG(S \circ R) = S[IMG(R) \cap DOM(S)] \ \left(= S[\ IMG(R)\ ]\right)$
3. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Prueba: **Ejercicio**. †

Ejercicio:

1. ¿ $R^{-1} \circ R = Id_{DOM(R)}$? y
2. ¿ $R \circ R^{-1} = Id_{IMG(R)}$?