Funcionales y Funciones.

Definición$_7$. Sea F una clase. Diremos que F es una *Funcional* syss

1. F es una relacional. Y
2. $\forall x, y_1, y_2 \left[\langle x,\, y_1 \rangle \in F \;\&\; \langle x,\, y_2 \rangle \in F \;\rightarrow\; y_1 = y_2 \right]$

Y en el caso en que F fuera un conjunto, diremos que F es una *Función.*

Observación. Son equivalentes a **2**, las siguientes:

- $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \left[\langle x_1,\, y_1 \rangle \in F \;\&\; \langle x_2,\, y_2 \rangle \in F \;\&\; x_1 = x_2 \;\rightarrow\; y_1 = y_2 \right]$
- $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \left[\langle x_1,\, y_1 \rangle \in F \;\&\; \langle x_2,\, y_2 \rangle \in F \;\&\; y_1 \neq y_2 \;\rightarrow\; x_1 \neq x_2 \right]$

Notación:

1. Sea F una funcional.

a. Si $x \in DOM(F)$, escribiremos $F(x)$, para denotar al único conjunto que cumple con que $\langle x,\, F(x) \rangle \in F$. Dicho de otra manera,

$$F(x) = \cap \left\{ y \;/\; \langle x,\, y \rangle \in F \right\}$$

Nota: Si $x \notin DOM(F)$, la notación $F(x)$ *NO* tiene sentido y estará prohibida.

b. Si $\langle x,\, y \rangle \in F$, algunas veces escribiremos $x \mapsto y$.

2. Escribiremos $F : A \rightarrow B$, para denotar que:

a. F es una funcional,

b. El dominio de F es la clase A. En símbolos: $DOM(F) = A$, y

c. La imagen de F es una subclase de la clase B. En símbolos: $IMG(F) \subseteq B$. A B se le llamará *(un) Contradominio o (un) Codominio.*

3. $FNC = \left\{ f \;/\; f \text{ es una función} \right\}$.

Ejemplos:

1). $\bigcup : V \rightarrow V$

$\bigcup(x) = \left\{ w \;/\; \exists y \,(y \in x \;\&\; w \in y) \right\}$

2). $\cup : V \times V \rightarrow V$

$\langle a,\, b \rangle \mapsto a \cup b \quad \left(= \left\{ w \;/\; (w \in a \vee w \in b) \right\} \right)$

3). $\wp : V \to V$
$x \mapsto \wp(x)$

4). $Id_A : A \to A$
$x \mapsto x,$ para todo $x \in A.$

5). $\{\_\} : V \to V$
$x \mapsto \{x\}$

6). $\emptyset$ es una **función**, es decir, $\emptyset \in FNC.$ Con $DOM(\emptyset) = \emptyset$ e $IMG(\emptyset) = \emptyset.$
Podemos escribir,

$$\emptyset : \emptyset \to \emptyset$$

O también,

$$\emptyset : \emptyset \to A$$

donde A es cualquier clase.

Proposición$_7$. Sean F y G funcionales. Así, $F = G$ syss

i). $DOM(F) = DOM(G)$. Y

ii). $\forall x \in DOM(F)\left[F(x) = G(x)\right].$

Prueba: **TAREA**. †

Definición$_8$. Sea $F : A \to B.$ Diremos que,
F es *Inyectiva* o que F es 1 *a* 1 syss

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2\left[\langle x_1, y_1\rangle \in F \ \&\ \langle x_2, y_2\rangle \in F \ \&\ y_1 = y_2 \ \to\ x_1 = x_2\right]$$

Son equivalentes a que F es inyectiva,

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2\left[\langle x_1, y_1\rangle \in F \ \&\ \langle x_2, y_2\rangle \in F \ \&\ x_1 \neq x_2 \ \to\ y_1 \neq y_2\right]$$

o,

$$\forall x_1, x_2 \in A\left[F(x_1) = F(x_2) \ \to\ x_1 = x_2\right]$$

Notación: $F : A \rightarrowtail B$

Definición$_9$. Sea $F : A \to B.$ Diremos que,
F es *Suprayectiva* o que F es *Sobre* B syss

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\left[\langle x, y\rangle \in F\right]$$

equivalentemente, $IMG(F) = F[A] = B$.

Notación: Algunas veces escribiremos:

$$F : A \twoheadrightarrow B$$

Definición$_{10}$. Sea $F : A \to B$. Diremos que,
F es *Biyectiva* syss F es inyectiva y suprayectiva.

Notación: Algunas veces escribiremos:

$$F : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \quad \text{o} \quad A \underset{F}{\sim} B$$

Y diremos que A *es equipotente con* B

Proposición$_8$. Sea F una funcional.
F^{-1} es una funcional syss F es inyectiva.

Prueba: **TAREA**. †

Definición$_{11}$. Sea F una funcional y A una clase.

$$F \restriction A = \left\{ \left\langle x, y \right\rangle \in F \ / \ x \in A \right\}$$

Así, $F \restriction A$ es una funcional, con $DOM(F \restriction A) = DOM(F) \cap A$ e $IMG(F \restriction A) \subseteq IMG(F)$. Obsérvese que si $A \cap DOM(F) = \emptyset$, entonces $F \restriction A = \emptyset$.

Definición$_{12}$. Sean $a, b \in V$.

$$^{a}b = \left\{ f \ / \ f : a \to b \right\}$$

Proposición$_9$. Si $a, b \in V$, entonces $^{a}b \in V$.

Prueba: Si $f \in {}^{a}b$, entonces $f \subseteq a \times b$; por lo que $^{a}b \subseteq \wp(a \times b)$. Finalmente, si $a, b \in V$, sabemos que $a \times b \in V$; ahora, por el axioma de potencia (**ZF$_5$**), $\wp(a \times b) \in V$ y por comprensión (**ZF$_6$**), resulta que $^{a}b \in V$. †

¿Quién es $^{\emptyset}b$ y quién $^{a}\emptyset$? **Ejercicio**.

Recordemos que la composición está definida para relacionales, por ende, a las funcionales:

Si F y G son funcionales, entonces

$$G \circ F = \left\{ \left\langle x, z \right\rangle \ / \ \exists y \left[\left\langle x, y \right\rangle \in F \ \& \ \left\langle y, z \right\rangle \in G \right] \right\}$$

Proposición$_{10}$. Sean F y G funcionales. Así,

i). $G \circ F$ es una funcional.

ii). Si $IMG(F) \subseteq DOM(G)$, entonces

$$G \circ F : DOM(F) \to IMG(G)$$

ii). $\forall x \in DOM(G \circ F)\left[(G \circ F)(x) = G(F(x))\right]$.

Prueba: **Ejercicio**. †

Dos funcionales, como relacionales que son, su unión es otra relacional.¿Cúando, es decir bajo qué condiciones, es una funcional?

Definición$_{13}$. Sean F y G funcionales. Diremos que F y G son *Compatibles* syss

$$\forall x \in (DOM(F) \cap DOM(G))\left[F(x) = G(x)\right]$$

Proposición$_{11}$. Sean F y G funcionales.

1. $F \cup G$ es una funcional syss F y G son compatibles.

2. F y G son compatibles syss

$$F \upharpoonright (DOM(F) \cap DOM(G)) = G \upharpoonright (DOM(F) \cap DOM(G))$$

3. Como relacionales que son F y G, se tiene:

a. $DOM(F \cup G) = DOM(F) \cup DOM(G)$ e

b. $IMG(F \cup G) = IMG(F) \cup IMG(G)$

Prueba: *Ejercicio.* †

Generalizamos esta noción para una clase de funciones.

Definición$_{14}$. Sea $\mathcal{F} \subseteq FNC.$ Diremos que $\mathcal{F}$ es, o forma, un *Sistema Compatible de Funciones* syss cqsean f, $g \in \mathcal{F}$, se tiene que f y g son compatibles.

Proposición$_{12}$. Sea $\mathcal{F}$ un sistema compatible de funciones. Así,

1. $\bigcup \mathcal{F}$ es una funcional.

a. $DOM(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \left\{DOM(f) \;/\; f \in \mathcal{F}\right\}$

b. $IMG(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \left\{IMG(f) \;/\; f \in \mathcal{F}\right\}$

2. Para cualesquiera conjuntos x e y, se tiene

$$\langle x, y\rangle \in \bigcup \mathcal{F} \leftrightarrow \exists f \in \mathcal{F}\left[\langle x, y\rangle \in f\right]$$

o bien,

$$x \in DOM\left(\bigcup \mathcal{F}\right) \ \& \ \left(\bigcup \mathcal{F}\right)(x) = y \leftrightarrow \exists f \in \mathcal{F}\left[x \in DOM(f) \ \& \ f(x) = y\right]$$

Prueba: **TAREA**. †

Para finalizar, un poco de:

Notación: Sea F una funcional, con $DOM(F) = I$.

1. $F \rightleftharpoons \left\langle F(i) \ / \ i \in I\right\rangle \rightleftharpoons \left\langle \ F(i) \ \right\rangle_{i\in I}$

$\rightleftharpoons \left\langle F_i \ / \ i \in I\right\rangle \rightleftharpoons \left\langle \ F_i \ \right\rangle_{i\in I}$

2. $IMG(F) = \left\{F(i) \ / \ i \in I\right\} \rightleftharpoons \left\{ \ F(i) \ \right\}_{i\in I}$

$\rightleftharpoons \left\{ \ F_i \ \right\}_{i\in I}$

Se le suele llamar una *Familia de conjuntos con Indices en* I.

OjO: No confundir $\left\langle F(i) \ / \ i \in I\right\rangle$, que es la funcional, con su imagen, $\left\{F(i) \ / \ i \in I\right\}$

3. $\bigcup IMG(F) = \bigcup \left\{F(i) \ / \ i \in I\right\} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i\in I} F(i)$

$\rightleftharpoons \bigcup\limits_{i\in I} F_i$

4. $\bigcap (IMG(F)) = \bigcap \left\{F(i) \ / \ i \in I\right\} \rightleftharpoons \bigcap\limits_{i\in I} F(i)$

$\rightleftharpoons \bigcap\limits_{i\in I} F_i$