Números Naturales

Von Neumann (1923): un *Número Natural* es el *Conjunto* de los números naturales anteriores a él. Abusando de la notación, podemos poner:

$$n+1 = \{0,\ 1,\ \dots,\ n\}$$

Así, nosotros podríamos definir natural por natural, de la siguiente manera:

Definición$_1$.
$0 = \emptyset$
$1 = \{\ 0\ \} = \{\ \emptyset\ \}$
$2 = \{0,\ 1\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}$
$3 = \{0,\ 1,\ 2\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$
$4 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\} = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$
$\vdots$

Obsérvese que estas definiciones están bien dadas, puesto que se basan en: **ZF**$_1$, **ZF**$_2$ y **ZF**$_3$.

CONSTRUCCIÓN

La definición de número natural que optamos, la de Von Newman, es una *definición puntual* y se quisiera una *definición global* es decir una de la forma:

x es un número natural **syss** x es un conjunto tal, que $\dots$

(donde, obviamente, en ..., **no** debe aparecer involucrada la noción de número natural).

Para darla, tratemos de entresacar propiedades que tengan en común los conjuntos de *La Lista:* $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ e intentar dar dicha definición.

Vemos a simple vista, que los conjuntos de *la lista* cumplen con dos propiedades:

(**1**) Todo elemento de uno de *la lista* está en *la lista*. Dicho de otra manera: todo elemento de un número natural es otro número natural. Dejemos pendiente esta propiedad.

(**2**) El “orden” entre ellos es $\in$:

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in\ \dots$$

Informalmente: Si n y m están en *la lista*

$$n < m \text{ syss } n \in m$$

Veamos esto más de cerca:

Entre los elementos de uno de ellos, digamos n, la $\in$ lo ordena totalmente: En símbolos:

$$\langle n, \ \in_n \rangle \in COTO$$

en sentido **estricto**, es decir, la $\in$ es irreflexiva sobre n. Más aún, la $\in$ lo bien ordena: Todo subconjunto no–vacío de n tiene un elemento $\in$–mínimo:

$$\langle n, \ \in_n \rangle \in COBO$$

OjO: $\{1, 2, 3\} \in COBO$, pero no es uno de *la lista*. Así, el ser bien ordenado por la $\in$ es una condición necesaria pero no suficiente como para estar en *la lista*. Otra propiedad que vemos que tienen estos es:

(**3**) Los de *la lista*, cumplen con,

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ \dots$$

y al mismo tiempo con,

$$0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq \dots$$

Es decir, cada vez que un elemento, uno de *la lista*, pertenece a otro al mismo tiempo es un subconjunto. Esta propiedad tiene un nombre específico:

Definición$_2$. Un conjunto a se dice que es un *(Conjunto) Transitivo* syss

$$\forall y\left[y \in a \ \rightarrow \ y \subseteq a \right]$$

Observación. Son equivalentes:

- **a**) $\forall y\left[y \in a \ \rightarrow \ y \subseteq a \right]$
- **b**) $\forall y\left[y \in a \ \rightarrow \ y \in \wp(a) \right]$
- **c**) $a \subseteq \wp(a)$
- **d**) $a \in \wp(\wp(a))$
- **e**) $\forall x,y\left[\left(x \in y \ \& \ y \in a \right) \ \rightarrow \ x \in a \right]$
- **f**) $\bigcup a \subseteq a$
- **g**) $\bigcup a \in \wp(a)$

Todas éstas son definiciones alternativas. Debido al **e**) es el nombre de transitivo.

Esta noción se generaliza para clases y relacionales arbitrarias:

Definición$_3$. Sean A una clase y R una relacional. Diremos que la clase A es R–*Transitiva* syss

$$\forall x,y\Big[(xRy \ \& \ y \in A) \ \rightarrow \ x \in a\Big]$$

Dicho de una manera coloquial, A es R–Transitiva syss A es cerrada bajo R-predecesores. Observemos que A sea $\in$–transitiva es lo mismo que A sea transitiva.

Consideremos $a = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. El conjunto a es un transitivo que no está en *la lista*. Así tampoco, el ser transitivo, es una condición suficiente para estar en *la lista*. En este mismo conjunto a, vemos que la $\in$ no es transitiva y por tanto la $\in$ no lo ordena totalmente y, mucho menos, lo bien ordena (esto nos dá un ejemplo de que las nociones de ser un conjunto transitivo y de que la $\in$ sea transitiva no son equivalentes).

Ahora pensemos en un conjunto que es tanto transitivo como bien ordenado por la pertenencia; ¿estará en *la lista*? Hay un problema; bien podríamos tener uno con estas propiedades y ser “muy grande”, ser un conjunto ¡infinito! y todos los de la lista son“finitos” (esa es la idea, a pesar de no tener la definición de infinito). Esta idea de “finitud” se puede capturar de la siguiente manera:

(**4**). Todo subconjunto no-vacío, de uno de *la lista*, tiene $\in$–máximo.

Con esto tenemos las herramientas suficientes para poder dar una definición global de número natural:

Definición$_4$. Un conjunto n es un *(Número) Natural* syss

•) n es un conjunto transitivo.

••) $\langle n, \ \in_n \rangle \in COBO$ en forma estricta. Y

•••) Todo subconjunto no–vacío de n, tiene $\in_n$ –máximo.

Observación:

Entre los elementos de un natural no hay cadenas “finitas” cerradas con la $\in$, en particular un natural no se pertenece a sí mismo (la $\in$ es irreflexiva sobre cualquier natural) y no tiene dos elementos que se pertenezcan mutuamente (la $\in$ es asimétrica sobre cualquier natural).

Una manera económica de trabajar con la definición de natural, nos la dá la siguiente:

Proposición$_1$. Son equivalentes:

1. n es un natural

2. **i**) n es un conjunto transitivo.

ii) $\in$ es asimétrica sobre n : $\neg\exists x,y \in n\left[x \in y \ \& \ y \in x\right]$

iii) Si b es un conjunto tal que $\emptyset \neq b \subseteq n,$ entonces

a) b tiene $\in_n$ –mínimo; y

b) b tiene $\in_n$ –máximo.

3. **i**) n es un conjunto transitivo.

ii) $\in$ es irreflexiva sobre n : $\forall x \in n\,[x \notin x]$

iii) $\in$ es tricotómica sobre n : $\forall x,y \in n\left[x \in y \vee y = x \vee y \in x\right]$

iv) Si b es un conjunto tal que $\emptyset \neq b \subseteq n,$ entonces

a) b tiene $\in_n$ –minimal; y

b) b tiene $\in_n$ –maximal.

Prueba: **TAREA**. †

Notación:

$$\mathbb{N} = \left\{x \ / \ x \text{ es un natural}\right\}$$

De principio, $\mathbb{N}$ es una clase, quedará pendiente el responder a la pregunta: ¿ existe $\mathbb{N}$? es decir, ¿ $\mathbb{N} \in V$?