# Inducción para $\omega$.

Puesto que $\omega$ es el $\subseteq$–menor conjunto inductivo, tenemos el:

## Principio de Indución para ω

Cualquiera de los siguientes enunciados, equivalentes por supuesto, son formulaciones del Principio de Indución para los números naturales:

**1**. Si $i$ es inductivo, entonces $\omega \subseteq i$.

**2**. Si $i$ es un conjunto tal que:
- **I**. $0 \in i$, y
- **II**. $\forall x \left[ x \in i \to x^+ \in i \right]$,

entonces $\forall x \in \omega\, [x \in i]$.

**3**. Si $a \subseteq \omega$ es tal que:
- **I**. $0 \in a$, y
- **II**. $\forall x \left[ x \in a \to x^+ \in a \right]$,

entonces $a = \omega$.

A los incisos **I** se les conoce con el nombre de *Base de la Inducción* y a los incisos **II** con el de, *Paso Inductivo.* Al antecedente de la implicación, en **II**, se le llama *Hipótesis Inductiva.*

Podemos dar una forma más general –para clases– para este principio. Son, trivialmente, equivalentes:

**A**. Si $I$ es una clase inductiva, entonces $\omega \subseteq I$.

**B**. Si $I$ es una clase tal que:
- **I**. $0 \in I$, y
- **II**. $\forall x \left[ x \in I \to x^+ \in I \right]$,

entonces $\forall x \in \omega\, [x \in I]$.

**C**. Si $\varphi$ es una fórmula conjuntista tal, que:
- **I**. $\varphi(0)$, y
- **II**. $\forall x \left[ \varphi(x) \to \varphi(x^+) \right]$.

entonces $\forall x \in \omega\, \varphi(x)$.

Solo necesitamos justificar **A.**, pero basta ver que

$$i = \left\{ x \ / \ x \in \omega \ \& \ x \in I \right\} = \omega \cap I$$

es un conjunto inductivo.

Necesitaremos las siguientes propiedades de los naturales y dejamos su prueba al lector.

**Proposición$_6$**. La funcional sucesor es monótona para los naturales:

$$\forall x \in \omega \ \forall y \in \omega \left[ x \in y \ \rightarrow \ x^+ \in y^+ \right]$$

**Proposición$_7$**. $\forall x \in \omega \left[ x = 0 \ \vee \ 0 \in x \right]$.