Un orden para ω.

Pasemos ahora a analizar el orden entre los naturales. Nuestro candidato para ordenarlos es, obviamente, la relacional de pertenencia: $\in$.

Sabemos que la $\in_\omega$ es irreflexiva sobre ω, también, puesto que ω es un conjunto de conjuntos transitivos, la $\in_\omega$ es transitiva sobre ω. Hasta ahora tenemos que la $\in$ ordena parcialmente, en forma estricta, a ω. Para ser un orden total o lineal, nos hace falta ver que cualesquiera dos naturales son comparables, es decir, falta la tricotomía:

$$\forall x \in \omega \forall y \in \omega \left[x \in y \ \vee \ x = y \ \vee \ y \in x \right]$$

Consideremos:

$$\varphi(n) \rightleftharpoons \forall m \in \omega \left[(n \in m) \ \vee \ (n = m) \ \vee \ (m \in n) \right]$$

Probaremos por inducción que $\forall n \in \omega,\ \varphi(n)$.

$\varphi(0) \big]$ P.D. $\forall m \in \omega\ [(0 \in m) \vee (m = 0) \vee (m \in 0)]$ lo cual es la **Proposición**$_7$.

$\forall n \in \omega\ [\varphi(n) \to \varphi(n^+)] \big]$ Sea $n \in \omega$ y supongamos inductivamente que $\varphi(n)$.

Demostremos que $\varphi(n^+)$, es decir:

$$\forall m \in \omega \left[(n^+ \in m) \ \vee \ (n^+ = m) \ \vee \ (m \in n^+) \right]$$

sea pues, $m \in \omega$. Por H.I. tenemos tres casos:

$n \in m \big]$ Por la **Proposición**$_6$, tenemos $n^+ \in m^+ = m \cup \{m\}$. Así, $n^+ \in m$ o $n^+ = m$.

$n = m \big]$ Por ser funcional la sucesor, $n^+ = m^+$ y como $m \in m^+$, tenemos $m \in n^+$.

$m \in n \big]$ Tenemos: $m \in n$ y también que $n \in n^+$, por tanto $m \in n^+$.

En cualquier caso, tenemos lo que queríamos. †

Y como es de esperarse, también la $\in$ bien ordena a los naturales: Nos faltaría ver que:

$$\forall x \left[\emptyset \neq x \subseteq \omega \ \to \ x \text{ tiene un } \in_\omega \text{–mínimo} \right]$$

Sea pues $\emptyset \neq b \subseteq \omega$. Hay un $m \in b$. Fijémonos en el natural m^+ y sea $c = m^+ \cap b$. Así, $\emptyset \neq c \subseteq m^+ \in \omega$. Por lo que c tiene un $\in_{m^+}$ -mínimo, digamos n, que cumple con:

1). $n \in c$. Y

2). $\forall w\ [w \in c \to (n \in w) \vee (n = w)]$.

Veamos que n es también, el $\in_\omega$ –mínimo de b. Pues,

a). $n \in b$: Por **1**) y de que $c \subseteq b$.

b). $\forall u\ [u \in b \to (n \in u) \vee (n = u)]$: Sea $p \in b$. Comparemos a p y a n en el orden de ω. Si fuera el caso de que $p \in n$, como $n \in m^+ \in \omega$, tenemos que $p \in m^+$ y finalmente, tendríamos que $p \in c$, lo cual contradiría a **2**). Concretando, $p \notin n$. Finalmente, gracias la tricotomía de $\in_\omega$, tenemos que $n \in p$ o que $n = p$.

Resumimos todo esto en la siguiente,

Proposición$_8$. $\langle \omega, \in_\omega \rangle \in COBO$ estricto.

Entre números naturales la relación entre la $\in$ y la $\subseteq$ es muy estrecha, de hecho:

Proposición$_9$. $\forall n, m \in \omega \left[n \in m \leftrightarrow n \subsetneq m \right]$.

Prueba: Sean $n, m \in \omega$.

$\Rightarrow$] Supongamos que $n \in m$. Por ser m transitivo, $n \subseteq m$; pero es imposible que $n = m$, por tanto $n \subsetneq m$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $n \subsetneq m$ y, con la intención de llegar a una contradicción, que $n \notin m$. Como la $\in$ es tricotómica sobre ω, tenemos $n = m$ o que $m \in n$. En el primer caso, contradice el hecho de que $n \subsetneq m$ y en el segundo, tendríamos que $m \in n \subseteq m$, lo cual también es contradictorio. †

Ahora, como es natural, damos una notación particular, para el orden de los naturales:

Notación: Para $n,\ m \in \omega$ escribiremos

$$n < m \quad \risingdotseq \quad n \in m \quad \risingdotseq \quad n \subsetneq m$$

Y siendo consitentes con esto, también pondremos

$$n \leq m \quad \risingdotseq \quad n \subseteq m \quad \risingdotseq \quad n \mathrel{\underline{\in}} m$$

Terminamos esta sección, enunciando algunas propiedades y dejando sus pruebas al lector.

Proposición$_{10}$. $\forall x \in \omega \left[x = 0 \ \vee \ \exists y \in \omega\ (y^+ = x) \right]$

Proposición$_{11}$. **a**) $\omega \neq 0$.

b) $\neg \exists x (x^+ = \omega)$

Proposición$_{12}$. En los naturales la funcional sucesor, es la sucesor inmediato.

$$\forall x \in \omega\, \neg \exists y \left[x \in y \ \& \ y \in x^+ \right]$$

Proposición$_{13}$. Entre naturales, la funcional sucesor es inyectiva.

$$\forall x \in \omega\ \forall y \in \omega \left[x \neq y \ \rightarrow \ x^+ \neq y^+ \right]$$