Notas a Recursión

Recordar que estamos trabajando en $\mathbf{Z}^{-} = \{\mathbf{ZF}_1, \ldots, \mathbf{ZF}_5\} \cup \mathbf{ZF_6} \cup \{\mathbf{ZF}_7\}$

El **Esquema de Recursión para** ω (en $\mathbf{Z}^{-}$) a la letra dice:

Si A es una clase, $a \in A$ y $G : A \to A$ entonces *hay* una *única* **funcional** F tal que

$$F : \omega \to A$$

I) $F(0) = a$

II) $\forall n \in \omega[F(n^+) = G(F(n))]$

Como se vió en la prueba , ésta solo nos garantiza la existencia de una *funcional*, $F,$ y por tanto no hay garantía de que la $IMG(F)$ sea un conjunto. Por supuesto tenemos el caso particular en que si la clase A es un conjunto, o equivalentemente, que la funcional G sea una función; entonces son conjuntos tanto F $\left(\text{pues } F \subseteq \omega \times A \in V\right)$ como la $IMG(F)$. Y éste quedaría enunciado (en $\mathbf{Z}^{-}$) como sigue:

Teorema de Recursión para ω, en $\mathbf{Z}^{-}$

Para toda función $g : b \to b$ y todo $a \in b$, *hay* una *única* **función** f tal que

$$f : \omega \to b$$

I) $f(0) = a$

II) $\forall n \in \omega\left[f(n^+) = g(f(n))\right]$

En general, tanto la funcional F , como la $IMG(F)$ no son conjuntos. Por ejemplo, consideremos el siguiente caso particular: Tomemos $A = V$, $a = \omega$ y $G = {}^+$, por el Esquema de Recusión para $\omega,$ tendríamos que hay una única *funcional* F_0 , tal que

$$F_0 : \omega \to V$$

I) $F_0(0) = \omega$

II) $\forall n \in \omega\left[F_0(n^+) = (F_0(n))^+\right]$

¿ La $IMG(F_0)$ es un conjunto ? Abusando un poco de la notación podríamos escribir

$$IMG(F_0) = \left\{F_0(n) \ / \ n \in \omega\right\} = \left\{\omega,\ \omega^+,\ (\omega^+)^+,\ \ldots\ \right\}$$

Para poder *"ver"* que no necesariamente se tiene que $IMG(F_0) \in V$, recordemos los primeros pasos en la construcción de conjuntos en la Jerarquia Acumulativa; abusando nuevamente de la notación:

$$R_0 = \emptyset$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\left[\ R_{n+1} = \wp(R_n)\ \right]$$
$$R_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$$

Teniendo por lo pronto hasta aquí construido, podemos continuar construyendo un poco más, de la siguiente manera:

$$\forall n \in \mathbb{N}\left[R_{\omega+(n+1)} = \wp(R_{\omega+n})\right]$$

para obtener finalmente a $R_{\omega+\omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{\omega+n}$.

En $R_{\omega+\omega}$ se puede *"ver"* que $IMG(F_0)$ es una *Clase Propia*, puesto que nunca se terminó de construir. Es un buen ejercicio probar que $R_{\omega+\omega} \models$ **Z**$^-$ + **ABF**.

Concretando: Con los axiomas que tenemos hasta ahora **no se puede probar** que algunas clases -particulares, pero *importantes,* por lo sencillas y no conflictivas que parecen- sean conjuntos. Si queremos que nuestra teoría permita, o mejor dicho, pruebe la existencia de conjuntos similares a $IMG(F_0)$ tenemos que agregar algún principio adicional; este es:

ZF$_8$: Esquema Axiomático de Sustitución o Reemplazo.
(Fraenkel 1922, Skolem 1923, hay ideas anteriores en Cantor 1899)

La imagen de un conjunto a través de una funcional es un conjunto.

Si F es una funcional y b es un conjunto, entonces $F[b]$ también es un conjunto.

Formalmente:

$$\forall x\forall y_1\forall y_2\left[\varphi(x,y_1)\ \&\ \varphi(x,y_2)\ \rightarrow\ y_1 = y_2\right] \rightarrow \forall u\exists v\forall y\left[y \in v\ \leftrightarrow\ \exists x(x \in u\ \&\ \varphi(x,y))\right]$$

donde φ es una $\in$–fórmula en la cual la variable v no ocurre.

Con este axioma tenemos tanto que F como que la $IMG(F)$, son conjuntos pues: $IMG(F) = F[\omega] \in V$ y como $F \subseteq \omega \times IMG(F)$ tendríamos que $F \in V$.

Notación: **ZF**$^-$ = **Z**$^-$ + **ZF$_8$**

Podríamos enunciar el

Esquema de Recursión para ω (en $\mathbf{ZF}^-$).

Si A es una clase, $G : A \to A$ y $a \in A$, entonces *hay* una *única* **función** f tal, que

$$f : \omega \to A$$

I) $f(0) = a$

II) $\forall n \in \omega \left[f(n^+) = G(f(n)) \right]$