CLAUSURA R–TRANSITIVA

Veamos una aplicación al esquema de recursión para ω.

Definición. Sean R una relacional y $a \in V$. El *Segmento Inicial (Propio) determinado por a bajo R*, denotado por a_R, es la clase de los R–predecesores estrictos de a:

$$a_R = \left\{x \ / \ xRa \ \& \ x \neq a\right\}$$

Ejemplos:

1) $a_{\in} = \left\{x \ / \ x \in a \ \& \ x \neq a\right\} \subseteq a$
2) (**ABF**) $a_{\in} = a$
3) Si $a \notin CAM(R)$ o a es un elemento R–minimal de $CAM(R)$, entonces $a_R = \emptyset$
4) $a_{\ni} = \left\{x \ / \ a \in x \ \& \ x \neq a\right\} \notin V$

Definición. Sean R una relacional. R es *Izquierda Limitada* syss todo segmento inicial es un conjunto:

$$\forall x\left(x_R \in V \right)$$

Proposición. Sean R una relacional y $a \in V$. Si R es izquierda limitada, entonces hay un $\subseteq$–menor conjunto R–transitivo que contiene a a. Es decir, hay conjunto b tal, que:

I) **a**) $a \subseteq b$

b) b es R–transitivo

II) $\forall c\left[\left(a \subseteq c \ \& \ c \text{ es } R\text{–transitivo}\right) \rightarrow b \subseteq c\right]$

Prueba. Para cada conjunto x definimos x' como sigue

$$x' = \left\{z \ / \ \exists y \ (y \in x \ \& \ zRy)\right\}$$

Veamos que $x' \in V$. En primer lugar, tenemos que $x' = \bigcup\left\{y_R \ / \ y \in x\right\}$. Ahora bien, por hipótesis, para todo $y \in x$, $y_R \in V$ y gracias al axioma de Sustitución, **ZF**$_7$, obtenemos que

$$\left\{y_R \ / \ y \in x\right\} \in V$$

finalmente, $x' \in V$ por el axioma de la unión. Observemos que con lo anterior, resulta que, $\_' : V \rightarrow V$.

Definimos una función f recursivamente como sigue,

$$f : \omega \to V$$

i) $f(0) = a$

ii) $\forall n \in \omega\big[\, f(n^+) = (f(n))' \,\big]$

y pongamos que $b = \bigcup f[\omega] = \bigcup\Big\{f(n) \;/\; n \in \omega\Big\}$. Veamos que b es el buscado.

I) **a**) $a = f(0) \subseteq \bigcup f[\omega] = b.$

b) Supongamos que yRx y $x \in b,$ veamos que $y \in b.$ De la definición de b tenemos que hay un $n_0 \in \omega$ tal que $x \in f(n_0).$ Ahora bien, como $yRx,$

$$y \in (f(n_0))' = f(n_0^+) \subseteq \bigcup f[\omega] = b$$

II) Supongamos que c es un conjunto R–transitivo y que $c \supseteq a,$ veamos que $b \subseteq c.$ Ahora bien como $b = \bigcup\Big\{f(n) \;/\; n \in \omega\Big\},$ por las propiedades que tiene la unión, basta probar que $\forall n \in \omega\, f(n) \subseteq c.$ Y esto lo haremos por indución:

i). $f(0) = a \subseteq c.$

ii). Supongamos, inductivamente, que $f(n) \subseteq c.$ Probemos que $f(n^+) \subseteq c.$ Tenemos que: $f(n^+) = (f(n))' = \bigcup\Big\{y_R \;/\; y \in f(n)\Big\},$ sea pues, $x \in f(n^+),$ así hay un $y \in f(n)$ tal, que $x \in y_R.$ Ahora bien, como $f(n) \subseteq c$ y c es R–transitivo, con lo anterior, tenemos que $x \in c.$ †

Notación: Dado un conjunto a, el conjunto b cuya existencia queda garantizada por la proposición anterior, le llamaremos *La Clausura R–Transitiva de a* y lo denoteremos por $CT_R(a)$.

Observemos que gracias a la prueba anterior y por las propiedades de la intersección tenemos

$$CT_R(a) = \bigcap\Big\{c \;/\; c \supseteq a \;\&\; c \text{ es } R\text{–transitivo}\Big\}$$