VARIANTES A
RECURSIÓN PARA ω

Hay muchas versiones o variantes de Recursión para ω (en **ZF**$^{-}$), veamos algunas. Estas solamente las enunciaremos y daremos una sugerencia para su demostración.

a). Si A es una clase, $a \in A$ y $G_1 : A \times \omega \to A$, entonces hay una única **función** f_1 tal que

$$f_1 : \omega \to A$$

$$\textbf{I)}\quad f_1(0) = a$$

$$\textbf{II)}\quad \forall n \in \omega\Big[f_1(n^+) = G_1(f_1(n), n)\Big]$$

Observación:

$$f_1(0) = a \qquad f_1(2) = G_1\big(f_1(1),\, 1\big) = G_1\big(G_1(a,0),\, 1\big)$$

$$f_1(1) = G_1\big(f_1(0),\, 0\big) = G_1\big(a,\, 0\big) \qquad f_1(3) = G_1\big(f_1(2),\, 2\big) = G_1\Big(\ G_1\big(G_1(a,0),\, 1\big),\, 2\ \Big)$$

Para una prueba de **a**), solo hay que rehacer la prueba original.

Ejemplo: El factorial de un natural:

$$!\ : \omega \to \omega$$

$$\textbf{I)}\quad 0! = 1$$

$$\textbf{II)}\quad n^+! = n! \cdot n^+$$

En este caso: $A = \omega,\ a = 1$ y $G_1 : \omega \times \omega \to \omega$, con $G_1(p,q) = p \cdot q^+$ para toda $p,\ q \in \omega$.

b). Versión Paramétrica.

Si P es un conjunto, A una clase, $H : P \to A$ y $G_2 : P \times A \times \omega \to A$, entonces *hay* una *única* **función** f_2 tal que

$$f_2 : P \times \omega \to A$$

$$\textbf{I)}\quad \forall p \in P\ \Big[f_2(p,0) = H(p)\Big]$$

$$\textbf{II)}\quad \forall p \in P\ \forall n \in \omega\Big[f_2(p,n^+) = G_2(p, f_2(p,n), n)\Big]$$

Para la prueba de **b**) se puede usar **I**). *Sugerencia:* define por recursión $f_1 : \omega \to {}^{P}A$ como : $f_1(0) = H$ y $f_1(n^+) = G_1(f_1(n), n)$ donde $G_1 : {}^{P}A \times \omega \to {}^{P}A$ esta dada por $G_1(i,n)(p) = G_2(p,i(p),n)$. Finalmente $\forall p \in P\ \forall m \in \omega\, f_2(p,m) = f_1(m)(p)$.

Ejemplo: La Suma entre Naturales:

$$+ : \omega \times \omega \to \omega$$

I) $\forall m \in \omega\left[\ m + 0 = m\ \right]$

II) $\forall m \in \omega\left[\ m + n^+ = (m+n)^+\ \right]$

En este caso: $P = \omega$, $A = \omega$, $H : \omega \to \omega$, con $H = Id_\omega$ y $G_2 : \omega \times \omega \times \omega \to \omega$, con $G_2(p,q,r) = q^+$ para todos $p,q,r \in \omega$.

c) Si a es un conjunto, denotamos el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de a por $\overset{\omega}{\smile}a$; formalmente,

$$\overset{\omega}{\smile}a = \bigcup_{n\in\omega} ({}^n a)$$

Si a es un conjunto y $g : \overset{\omega}{\smile}a \to a$, entonces *hay* una *única* **función** f_3 tal que

$$f_3 : \omega \to a$$

$$\forall n \in \omega\left[f_3(n) = g(f_3 \restriction n)\right]$$

Observación:

$f_3(0) = g(f_3 \restriction 0) = g(f_3 \restriction \emptyset) = g(\emptyset) = g(0)$ y $f_3(1) = g(f_3 \restriction 1) = g(\{\langle 0, g(0)\rangle\})$

Para la prueba de **c**) se puede usar **a**). *Sugerencia:* Sea $G_1 : S \times \omega \to A$, $G_1(x,n) = x \cup \{(n, g(x))\}$, Por **a**), hay $f_1 : \omega \to S$ tal que $f_1(0) = \emptyset$ y $f_1(n^+) = G(f_1(n), n)$. Finalmente, sea $f_3 = \cup f_1$.

Ejemplo: Para obtener la Sucesión de Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,..., basta tomar: $a = \omega$ y $g : \overset{\omega}{\smile}\omega \to \omega$, dada como sigue, para cada $t \in \overset{\omega}{\smile}\omega$, sea

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } DOM(t) = 0 \\ 1 & \text{si } DOM(t) = 1 \\ t(n) + t(n+1) & \text{si } DOM(t) = n+2 \text{ para algún } n \in \omega \end{cases}$$

por **c**) tendríamos que hay una única $F : \omega \to \omega$ tal que $\forall n \in \omega\ [F(n) = g(F \restriction n)]$. Así,

$F(0) = \ g(0) = 1$

$F(1) = \ g(F \upharpoonright 1) = 1$

$F(2) = \ g(F \upharpoonright 2) = (F \upharpoonright 2)(0) + (F \upharpoonright 2)(1) = F(0) + F(1) = 1 + 1 = 2$

$F(3) = \ g(F \upharpoonright 3) = (F \upharpoonright 2)(1) + (F \upharpoonright 2)(2) = F(1) + F(2) = 1 + 2 = 3$

$F(4) = \ F(2) + F(3) = 2 + 3 = 5$

Podríamos decir, hay una única función $F : \omega \to \omega$ tal que

1. $F(0) = 1$ y $F(1) = 1$

2. $\forall n \in \omega \ F(n+2) = F(n) + F(n+1)$

d) Si A es un conjunto, $a \in A$ y g una función con $DOM(g) \subseteq A \times \omega$ e $IMG(g) \subseteq A$, entonces *hay* una *única* **función** f_4 tal que

0) $DOM(f_4) = \omega$ o $DOM(f_4) = k_0^+$ donde $k_0 = min\left\{k \in \omega \ / \ (f(k), k) \notin DOM(g)\right\}$

00) $IMG(f_4) \subseteq A$

I) $f_4(0) = a$

II) $\forall n \left[n^+ \in DOM(f_4) \ \to \ \left[f_4(n^+) \ = \ g(f_4(n), n) \right] \right]$

Para la prueba de **d**) se puede usar **a**). *Sugerencia:* Sea $A^* = A \cup \{a^*\}$ donde $a^* \notin A$. Define $g^* : A^* \times \omega \to A^*$ como sigue:

$$g^*(x,n) = \begin{cases} g(x,n) & \text{si } (x,n) \in DOM(g) \\ a^* & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con **a**) obtendrás f^*. Si $f^*(i) = a^*$ para algún $i \in \omega$, considera $f^* \upharpoonright i$ para el menor de tales i.

Ejemplo: Si $X \subseteq \omega$, entonces hay una función inyectiva f con $IMG(f) = X$ y tal que $DOM(f) = \omega$ o $DOM(f) \in \omega$.