TEORIA DE LA COMPARACION

Definición$_1$. a es *Equipotente* a b syss hay una biyección de a a b.

1) $a \sim_f b$ syss $f : a \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow b$

2) $a \sim b$ syss $\exists f(a \sim_f b)$

Cuando se tiene que $a \sim b$ se suele decir que a y b *tienen el mismo Cardinal* y esto incluso se describe con la ecuación $|a| = |b|$. Esto puede ser confundente. Hay que aclarar las cosas; en primer lugar, esta definición establece una **relación** (de hecho, una relacional) entre conjuntos y **NO** se está definiendo lo que *es* o *sería* el **Cardinal** de un conjunto. Lo único que se tiene es una manera de comparar dos conjuntos *del mismo tamaño.*

Proposición$_1$.

1) $\sim$ es una relacional de equivalencia sobre V.

2) Sea $[a]_\sim = \{b \ / \ b \sim a\}$. Así

a) $[\emptyset]_\sim = 1$, y

b) Si $a \neq \emptyset$ entonces $[a]_\sim \notin V$.

Prueba: La parte **1**) y la **2.a**) son inmediatas, se queda de **Tarea 2.b**). †

Definición$_2$.

1) *Dominancia*.

a) $a \precsim_f b$ syss $f : a \rightarrowtail b$

b) $a \precsim b$ syss $\exists f[a \precsim_f b]$

2) *Dominancia Estricta.*

$a \prec b$ syss $a \precsim b$ & $a \nsim b$

Observación. Si $\exists f[f : a \rightarrowtail b]$ & $\neg\exists g[g : a \twoheadrightarrow b]$, entonces $a \prec b$.
¿Qué puede decir de la conversa?

Proposición$_2$.

1) $\precsim$ es reflexiva y transitiva pero **no**-antisimétrica sobre V.

$\precsim$ es un pre-órden sobre V.

2) $\prec$ es irreflexiva y **no**-tricotómica sobre V.

¿Qué puede se puede decir de la asimetría y de la transitividad de $\prec$? y de ¿la dicotomía de $\precsim$? Algo que viene a ayudar, en forma parcial, es el siguiente resultado.

Proposición$_3$. (**Teorema de Cantor–Schöeder–Bernstein**.)

$$\forall x,y\Big[x \precsim y \;\&\; y \precsim x \;\rightarrow\; x \sim y \Big]$$

Prueba. Sean $a,b,f,g,$ tales que $a \precsim_f b$ y $b \precsim_g a$. Contruiremos $h : a \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow b$.
Definimos $\Big\{ C_n \;/\; n \in \omega \Big\}$ recursivamente, como sigue:

I). $\quad C_0 = a \setminus g[b]$

II). $\quad \forall n \in \omega,\; C_{n+1} = g\Big[\; f[C_n] \;\Big]$

Sea $C = \bigcup_{n\in\omega} C_n$. También nos ayudará la siguiente,

Notación: Para $n \in \omega$ escribiremos $D_n = f[C_n]$ y también ponemos, $D = \bigcup_{n\in\omega} D_n$.

Observaciones:

1) $C \subseteq a$ y $D \subseteq b$

2) $a \setminus C \subseteq g[b]$

3) $g^{-1} : g[b] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow b,\; g^{-1} \circ g = Id_b$ y $g \circ g^{-1} = Id_{g[b]}$

4) $\forall n \in \omega,\; C_{n+1} = g[D_n]$

Con ayuda de **1**), **2**), y **3**) podemos definir una función $h : a \rightarrow b$ como sigue:

$$\forall x \in a,\; h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{Si } x \in C \\ \\ g^{-1}(x) & \text{Si } x \notin C \end{cases}$$

Veamos que $a \sim_h b$.

h **es inyectiva**$\Big]$ Sean $x,y \in a$ con $x \neq y$. Veamos que $h(x) \neq h(y)$.
Si ambos $x,y \in C$ o bien ambos $x,y \notin C$, entonces por la inyectividad de f o la de g^{-1}, respectivamente, tenemos lo que queríamos. Supongamos s.p.g. que $x \in C$ y que $y \notin C$.
Por un lado,tenemos que hay un $n_0 \in \omega$ tal que $x \in C_{n_0}$ y también que $h(x) = f(x)$; por lo que $h(x) = f(x) \in f[C_{n_0}] = D_{n_0}$.
Por otro lado, $h(y) = g^{-1}(y)$. Afirmamos que $g^{-1}(y) \notin D_{n_0}$, pues si $g^{-1}(y) \in D_{n_0}$, tendríamos que

$$y \underset{\mathbf{3)}}{=} g\Big(\; g^{-1}(y) \;\Big) \in g[D_{n_0}] \underset{\mathbf{4)}}{=} C_{n_0+1} \subseteq C \qquad \underset{\bigcirc}{\nabla}\;!!$$

Concretando, tenemos que $h(x) \in D_{n_0}$ y $h(y) \notin D_{n_0}$ por lo que $h(x) \neq h(y)$.

h **es suprayectiva**$\Big]$ Sea $z \in b$.Tenemos dos opciones:
Si $z \in D$, hay un $n_0 \in \omega$ tal que $z \in D_{n_0} = f[C_{n_0}]$, por lo que hay un $x \in C_{n_0} \subseteq C$ tal que $f(x) = z$ y de la definición de h, $h(x) = f(x) = z$. Y x es el buscado.

Supongamos ahora que $z \notin D$. Si $g(z) \notin C$ ya habríamos terminado, pues de la definición de h,

$$h(g(z)) = g^{-1}(g(z)) \underset{3)}{=} z$$

Y $g(z)$ sería el que buscamos. Veamos pues, que $\forall n \in \omega, g(z) \notin C_n$.
Sea $n \in \omega$, tenemos dos casos;

Si $n = 0$. Tenemos que $g(z) \notin C_0$, pues $C_0 = a \setminus g[b]$ y $g(z) \in g[b]$.

Si $n \neq 0$, hay un $m \in \omega$ tal que $n = m + 1$. No puede ser que $g(z) \in C_{m+1}$, pues si lo fuera, $g(z) \in C_{m+1} = g[D_m]$ y habría por tanto, un $w \in D_m$ tal que $g(z) = g(w)$ y por la inyectividad de g, $z = w$ con lo que $z \in D_m \subseteq D$ $\underset{\circ}{\nabla}$!!!

†

Corolario$_4$. (**Teorema del Sandwich**)

$$\forall x,y,z\left[x \precsim y \ \& \ y \precsim z \ \& \ x \sim z \ \rightarrow \ x \sim y \sim z\right]$$

Corolario$_5$.

1) $\prec$ es asimétrica sobre V
2) $\prec$ es transitiva sobre V
3) La dominancia estricta, $\prec$, establece un Orden Parcial sobre V

Ejemplos: …

Proposición$_6$. (**Cantor 189**?)

$$\forall a\left[a \prec \wp(a)\right].$$

Prueba. 1). $a \precsim_f \wp(a)$ donde $f(x) = \{x\}$ para $x \in a$.
2). Sea $g : a \rightarrow \wp(a)$. Tenemos que g no es suprayectiva; ya que

$$b = \left\{x \in a \ / \ x \notin f(x)\right\} \notin IM(G)$$

pues en caso contrario habría un $x_0 \in a$ tal que $f(x_0) = b$, lo cual nos lleva a la contradicción:

$x_0 \in b$	syss	$x_0 \notin f(x_0)$	def de b
	syss	$x_0 \notin b$	$f(x_0) = b$

Por tanto $a \nsim \wp(a)$. †

Proposición7. $\wp(a) \sim {}^{a}2$.

Prueba: Para cada conjunto $b \subseteq a$ definimos $\mathcal{C}_b : a \to 2$ como sigue:

$$\forall x \in a, \mathcal{C}_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in b \\ 0 & \text{si } x \notin b \end{cases}$$

A $\mathcal{C}_b$ se le conoce con el nombre de *La Función Característica de* b.

Así, si para cada $b \subseteq a$ ponemos $f(b) = \mathcal{C}_b$ tenemos que $f : \wp(a) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow {}^{a}2$. Pues:

f **es inyectiva**] Sean $b, c \subseteq a$ con $b \neq c$. Spg. sea $x \in b \setminus c$, así $\mathcal{C}_b(x) = 1$ mientras que $\mathcal{C}_c(x) = 0$ y por tanto $\mathcal{C}_b \neq \mathcal{C}_c$ y de aqui que $f(b) \neq f(c)$.

f **es suprayectiva**] Sea $g : a \to 2$. Veamos que $g \in IMG(f)$.

Sea $b = \{x \in a \ / \ g(x) = 1\} = g^{-1}[\ \{1\}\ ]$. Tenemos que $\mathcal{C}_b = g$ y por tanto $f(b) = g$. †