

CONJUNTOS FINITOS

Definición. CANTOR, G. (1845-1918).

En 1872 acepta el *Infinito (Actual)* de *Facto*, en contra de la idea que el *Infinito* es en *Potencia*.

a es *Finito* syss $\exists n \in \omega [n \sim a]$.

a es *Infinito* syss a **no** es finito.

Notación:

$$1). \text{ FIN} = \{x / x \text{ es finito}\}.$$

$$2). \text{ INF} = \{x / x \text{ es infinito}\}.$$

Observaciones:

1). $\forall n \in \omega, n \in \text{FIN}$.

2). Si $a \in \text{FIN}$ y $b \sim a$ entonces $b \in \text{FIN}$.

3). $a \sim 0$ syss $a = \emptyset$. Y $\emptyset \in \text{FIN}$.

Proposición₁. (Lema de Finitud). Ningún natural es equipotente con un subconjunto propio. En símbolos:

$$\forall n \in \omega \neg \exists x [x \subsetneq n \ \& \ x \sim n]$$

Prueba. Sea $\varphi(n) \equiv \neg \exists x [x \subsetneq n \ \& \ x \sim n]$. Probaremos por inducción para ω que $\forall n \in \omega \varphi(n)$.

$\varphi(0)$] Trivialmente es cierto que $\neg \exists x [x \subsetneq 0 \ \& \ x \sim 0]$.

$\forall n \in \omega [\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+)]$] Sea $n \in \omega$ y supongamos que $\neg \varphi(n^+)$ demostraremos que $\neg \varphi(n)$. Supongamos que $a \subsetneq n^+$ el cual $n^+ \sim_f a$. Tenemos dos casos:

$n \notin a$] Así, resulta que $a \subseteq n$ y $f(n) \in a \setminus \{n\}$. Con esto, $a \setminus \{f(n)\} \subsetneq n$. Ahora bien, sea $g = f \setminus \{\langle n, f(n) \rangle\}$. Con lo que tenemos que $n \sim_g a \setminus \{f(n)\}$.

$n \in a$] En este caso $a \setminus \{n\} \subsetneq n$ y hay un $k \in n^+$ tal que $f(k) = n$. Así, $n \sim_g a \setminus \{n\}$, donde

$$g = \begin{cases} f \setminus \{\langle n, n \rangle\} & \text{Si } k = n \\ 0 & \\ (f \setminus \{\langle n, f(n) \rangle, \langle k, n \rangle\}) \cup \{\langle k, f(n) \rangle\} & \text{Si } k \in n \end{cases}$$

En cualquier caso tenemos que $\neg\varphi(n)$.

†

Corolario₂.

1). Ningún conjunto finito es equipotente a un subconjunto propio,

$$\forall x \left[x \in FIN \rightarrow \neg \exists y [y \subsetneq x \ \& \ y \sim x] \right]$$

2). Cualquier conjunto equipotente a un subconjunto propio es infinito,

$$\forall x \left[\exists y [y \subsetneq x \ \& \ y \sim x] \rightarrow x \in INF \right]$$

3). $\omega \in INF$. (De hecho, como se verá, es el 1^{er} ordinal y cardinal infinito)

4). $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \in INF$.

Definición. (DEDEKIND, R. (1831-1916) En 1888)

a es *D-Infinito* syss $\exists y [y \subsetneq a \ \& \ y \sim a]$

a es *D-Finito* syss a **no** es D-Infinito

syss $\forall y [y \subseteq a \ \& \ y \sim a \rightarrow y = a]$

Observación: ω es D-infinito.

Corolario₃.

1) Si a es finito, entonces a es D-finito.

2) Si a es D-infinito, entonces a es infinito.

¿Qué puede decir de la conversa de esta proposición? (**R:** Depende del **AE**)

Corolario₄. Si $n, m \in \omega$, entonces

1) a) $n \neq m \rightarrow n \not\sim m$

b) $n \sim m \rightarrow n = m$

2) Si $a \sim n$ y $a \sim m$ entonces $n = m$

Con este resultado podríamos dar una definición parcial de cardinalidad: Si $a \in FIN$, entonces el cardinal de a es el único natural con el cual es equipotente; en notación quedaría así:

$$\begin{aligned} | \cdot | : FIN &\rightarrow \omega \\ \forall a \in FIN, |a| &= \bigcap \{n \in \omega / n \sim a\} \end{aligned}$$

Sin embargo, prescindiremos de esta definición y de la notación por el momento.

Corolario₅. (Principio del palomar para finitos). Sea $n \in \omega$. Si n objetos son colocados en menos de n casillas, entonces habrá una casilla con más de un objeto.

Proposición₆. Si $a \in FIN$, entonces $a \cup \{b\} \in FIN$.

De hecho,

$$\forall a \forall n \in \omega \forall p \left[a \sim n \ \& \ p \notin a \rightarrow (a \cup \{p\}) \sim n^+ \right]$$

Proposición₇. Al quitarle a un finito uno de sus elementos, sigue siendo finito.

De hecho:

$$\forall a \forall n \in \omega \forall p \left[a \sim n^+ \ \& \ p \in a \rightarrow (a \setminus \{p\}) \sim n \right]$$

Prueba: Supongamos que $a \sim_f n^+$. Definimos $g : (a \setminus \{p\}) \rightarrow n$, como sigue:

$$\text{para } x \in (a \setminus \{p\}), g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \neq n \\ f(p) & \text{si } f(x) = n \end{cases}$$

Así, $(a \setminus \{p\}) \sim_g n$. †

Proposición₈.

- 1). Los subconjuntos de un número natural son finitos.
- 2). Los subconjuntos de un conjunto finito son finitos.

Prueba 1): Sea

$$\varphi(n) \Leftrightarrow \forall x (x \subseteq n \rightarrow x \in FIN)$$

Probaremos por inducción: $\forall n \in \omega, \varphi(n)$.

$\varphi(0)$] $\forall x (x \subseteq 0 \rightarrow x \in FIN)$ es obviamente cierto.

$\forall n \in \omega [\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+)]$] Sea $n \in \omega$ y supongamos inductivamente que $\varphi(n)$. Sea $b \subseteq n^+$. Tenemos dos casos: Si $n \notin b$, entonces $b \subseteq n$ y por la H.I. tenemos que $b \in FIN$. Ahora veamos cuando $n \in b$; aquí $(b \setminus \{n\}) \subseteq n$ y nuevamente por la H.I., $(b \setminus \{n\}) \in FIN$. Finalmente, como $b = (b \setminus \{n\}) \cup \{n\}$, por la proposición anterior, tenemos que $b \in FIN$.

La prueba de 2) se sigue de 1). †

Otra forma de probar la proposición anterior es demostrando 2) (ya que 1) es un caso particular) y esta se puede hacer por inducción sobre la "cardinalidad del conjunto":

$$\forall n \in \omega \forall x \left[x \sim n \rightarrow \forall y (y \subseteq x \rightarrow y \in FIN) \right]$$

dejamos al lector, dicha prueba.

Corolario₉.

- a). Si $a \in FIN$ entonces $a \setminus b \in FIN$.
 b). Si $a \in FIN$ entonces $a \cap b \in FIN$.

Proposición₁₀. La unión de dos conjuntos finitos es finita.

Prueba. Por inducción sobre la cardinalidad de uno de ellos:

Supongamos que $a \in FIN$ y sea

$$\varphi(n) \Leftrightarrow \forall x [x \sim n \rightarrow a \cup x \in FIN]$$

probemos que $\forall n \in \omega \varphi(n)$.

$\varphi(0)$] Si $b \sim 0$, entonces $b = \emptyset$ y de aquí que $a \cup b = a \cup \emptyset = a \in FIN$.

$\forall n \in \omega [\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+)]$] Sea $n \in \omega$ y supongamos inductivamente $\varphi(n)$. Sean b, f y p tales que $b \sim_f n^+$ y $p = f^{-1}(n) \in b$. Así, por la **Proposición₇**, $(b \setminus \{p\}) \sim n$. Ahora, de la H.I. $a \cup (b \setminus \{p\}) \in FIN$, pero entonces, por la **Proposición₆**, $a \cup b = [a \cup (b \setminus \{p\})] \cup \{p\} \in FIN$. †

Proposición₁₁. La unión finita (e.d. la unión de un conjunto finito) de conjuntos finitos es finita.

Prueba. Por inducción sobre la cardinalidad del conjunto:

Sea φ la fórmula:

$$\varphi(n) \Leftrightarrow \forall x [(n \sim x) \ \& \ \forall y \in x (y \in FIN) \rightarrow \bigcup x \in FIN]$$

probemos que $\forall n \in \omega \varphi(n)$.

$\varphi(0)$] Si $a \sim 0$, entonces $a = \emptyset$ y de aquí que $\bigcup a = \bigcup \emptyset = \emptyset \in FIN$.

$\forall n \in \omega [\varphi(n) \rightarrow \varphi(n^+)]$] Sea $n \in \omega$ y supongamos inductivamente $\varphi(n)$. También supongamos que a y f son tales que $(n^+ \sim_f a)$ y $\forall y \in a (y \in FIN)$. Así $f(n) \in a$ y por tanto, gracias a la **Proposición₇**, $(a \setminus \{f(n)\}) \sim n$. De la H.I. tenemos que $\bigcup (a \setminus \{f(n)\}) \in FIN$. Ahora bien, puesto que $f(n) \in a$, tenemos que $f(n) \in FIN$ y de aquí que, por la proposición anterior, $\bigcup a = (\bigcup (a \setminus \{f(n)\})) \cup f(n) \in FIN$. †

Proposición₁₂.

1. El producto cartesiano de conjuntos finitos es finito.
2. Si $a \sim n$ y $b \sim m$, con $n, m \in \omega$, entonces $a \times b \sim n \cdot m$

Prueba de 1. Por un lado, tomando en cuenta que

$$a \times b = \bigcup \{a \times \{z\} \mid z \in b\}$$

y por otro, que $a \times \{z\} \sim a$ y que $\{a \times \{z\} \mid z \in b\} \sim b$. Finalmente, si a y b son

finitos, entonces $a \times b$ resulta ser la unión finita de conjuntos finitos. †

Proposición₁₃.

1. Si $a, b \in FIN$ entonces ${}^a b \in FIN$.
2. Si $n, m \in \omega$ son tales que $a \sim n$ y $b \sim m$, entonces ${}^a b \sim m^n$.

Prueba: TAREA.

Proposición₁₄.

1. El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto finito es finito.
2. Si $n \in \omega$ es tal que $a \sim n$, entonces $\wp(a) \sim 2^n$.

Prueba: Es inmediata de la proposición anterior y del teorema de Cantor: $\wp(a) \sim 2^a$. †

Proposición₁₅. La imagen de un conjunto finito, a través de una función, es finita.

Prueba: Sean $f \in FNC$ y $a \in FIN$. P.D. $f[a] \in FIN$. Puesto que:

$$f[a] = \{f(x) \mid x \in a\} = \bigcup \{ \{f(x)\} \mid x \in a \}$$

resulta que $f[a]$ es la unión finita de conjuntos finitos y por tanto finito. †

Otra demostración podría ser por inducción sobre la cardinalidad del dominio: Si $f \in FUN$, entonces

$$\forall n \in \omega \left[DOM(f) \sim n \rightarrow IMG(f) \in FIN \right]$$