Ma. Guadalupe Lucio Gómez Maqueo
Facultad de Ciencias, UNAM

Geometría Moderna II

Estas notas se desarrollaron para cubrir los temas del programa de Geometría Moderna II que se imparte en la Facultad de Ciencias.

Se presentan una serie de actividades para ir realizando a lo largo del curso. Se propone que algunas de ellas se realicen con el programa Geogebra, aunque la mayoría son demostraciones de diferentes propiedades geométricas, ya que uno de los objetivos fundamentales del curso es inducir al estudiante a la comprensión y utilización del método deductivo.

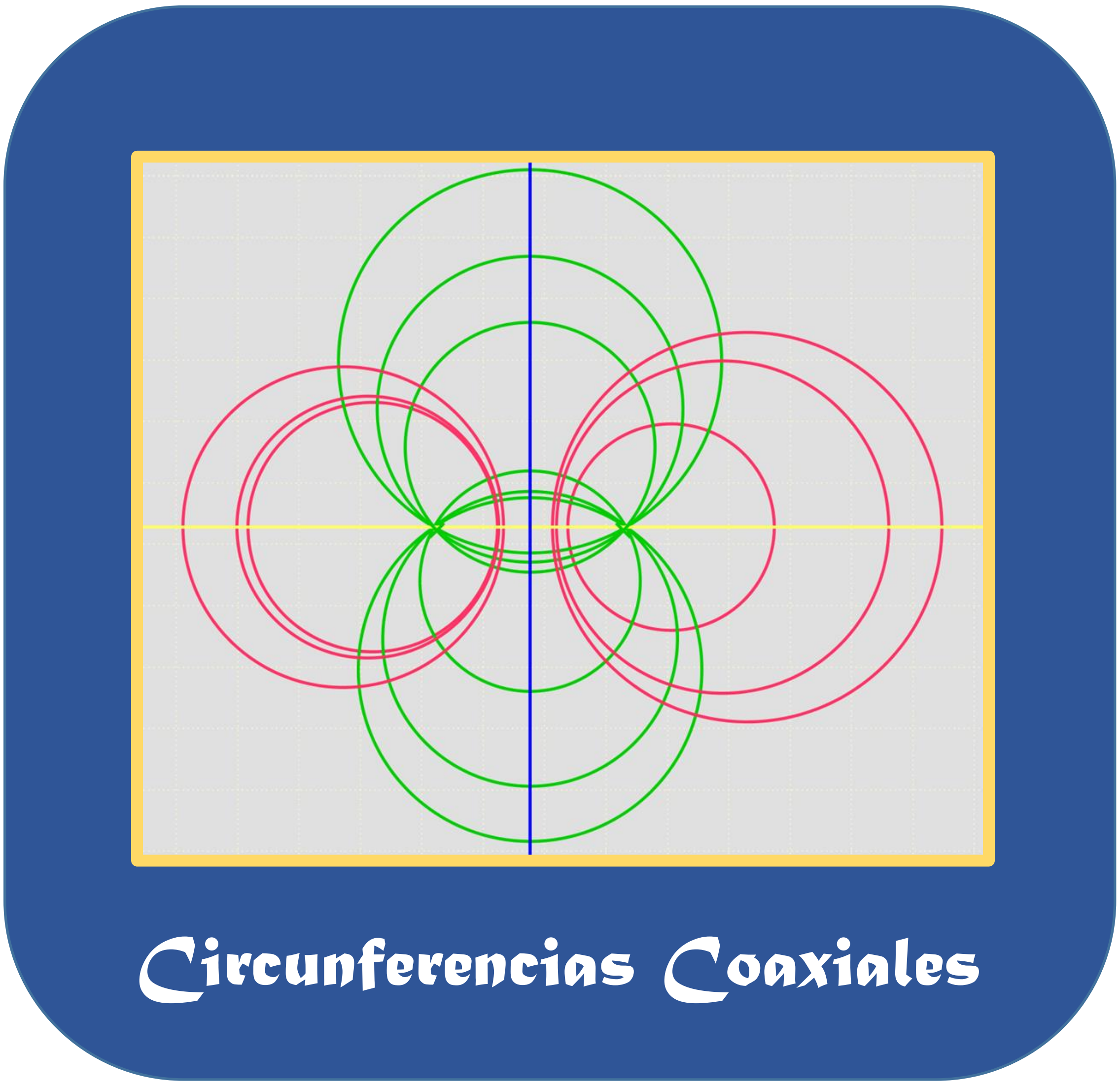
El programa Geogebra es de distribución gratuita y se puede bajar en la siguiente liga:

https://www.geogebra.org/

Se considera importante que se realicen las diferentes actividades propuestas, ya que muchos de los resultados que se incluyen en estas actividades se utilizan en momentos posteriores.

UNIDAD CINCO

Circunferencias coaxiales



5. Circunferencias Coaxiales

5.1. Algunas propiedades de la circunferencia

En el curso de Geometría Moderna I se vieron muchas propiedades de la circunferencia. Por mencionar algunas:

1. Existe un número infinito de circunferencias que pasan por dos puntos, una con centro en cada punto de su mediatriz.

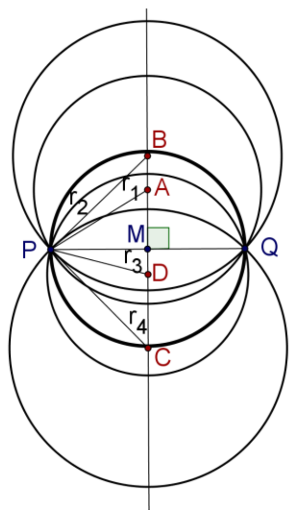


Figura 5.1

M punto medio de PQ

2. Existe una única circunferencia que pasa por tres puntos no colineales.

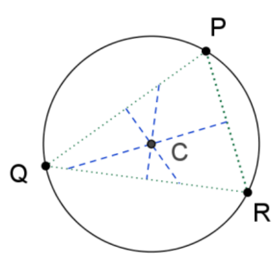


Figura 5. 2

C circuncentro, intersección de las mediatrices del triángulo PQR

C centro de la circunferencia por PQR

3. Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo son concurrentes en un punto llamado incentro. Este punto es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo o incírculo.

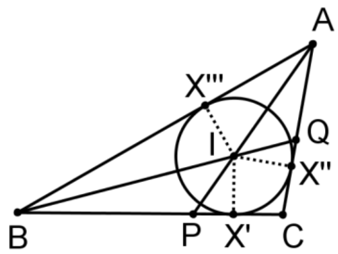


Figura 5.3

I incentro del incírculo y X', X'' y X''' puntos de tangencia del incírculo

4. Las bisectrices de dos de los ángulos exteriores y la del interior no adyacente de un triángulo concurren por tercias en tres puntos llamados excentros. Estos puntos son centro de circunferencias tangentes externamente a los lados del triángulo.

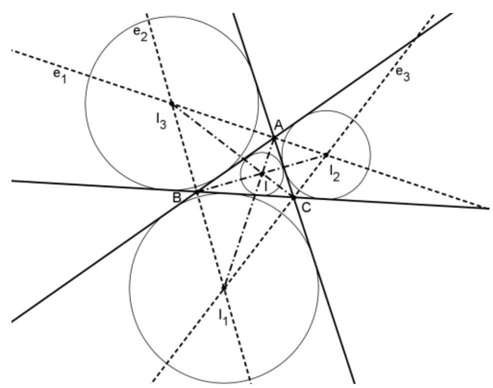


Figura 5.4

I_1, I_2 e I_3 excentros

5. El radio del circuncírculo de un triángulo *ABC* es el doble del radio del circuncírculo de su triángulo mediano.

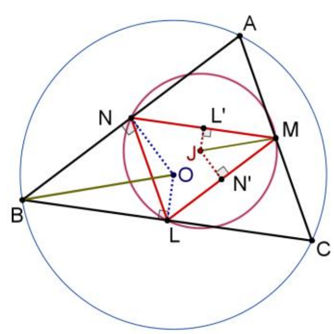


Figura 5.5

OB = 2JM

6. La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida del arco que abarca.

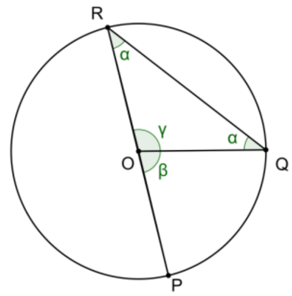


Figura 5. 6

$\beta = 2\alpha$

7. Sean *P* un punto en el plano y *C* una circunferencia dada, para cualquier recta que pase por *P* y corte a la circunferencia *C* en dos puntos *Q* y *R,* el producto $PQ \times PR$ es constante*.* A este producto se le llama la potencia de *P* respecto de *C.*

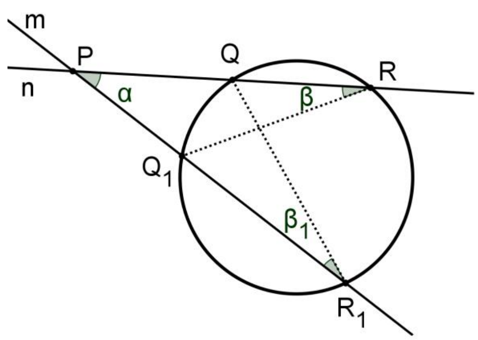


Figura 5.7

$PQ \times PR = PQ_1 \times PR_1$

8. La potencia de un punto *P* con respecto a una circunferencia con centro en el punto *O* y radio *r,* es igual a $PO^2 - r^2$. En el caso de que *P* sea exterior a la circunferencia y *PT* la longitud de la tangente desde *P* a la circunferencia, se tiene entonces que $PT^2 = PO^2 - r^2$.

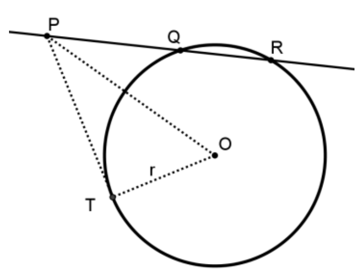


Figura 5.8

$PT^2 = PO^2 - r^2$

9. Las tangentes a una circunferencia desde un punto dado *P* tienen la misma longitud y forman ángulos iguales con la recta que une el punto y el centro de la circunferencia. Las tangentes son perpendiculares al radio al punto de tangencia.

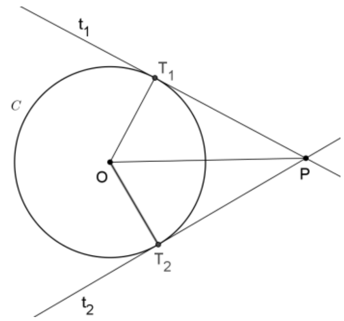


Figura 5.9

$PT_1 = PT_2$

10. Dos circunferencias son ortogonales si su ángulo de intersección es recto; esto es, si sus radios a los puntos de intersección son perpendiculares y cada uno de ellos es tangente a la otra circunferencia.

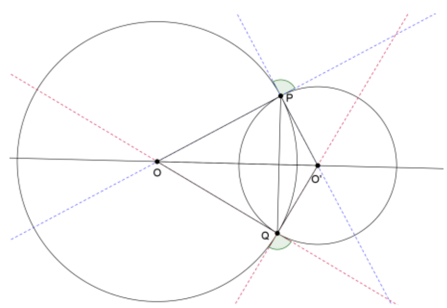


Figura 5.10

$OP \perp O'P$, $OQ \perp O'Q$

11. Dos circunferencias son ortogonales si y sólo si al ser cortadas por una recta que pasa por el centro de una de ellas, los cuatro puntos de intersección forman una hilera armónica.

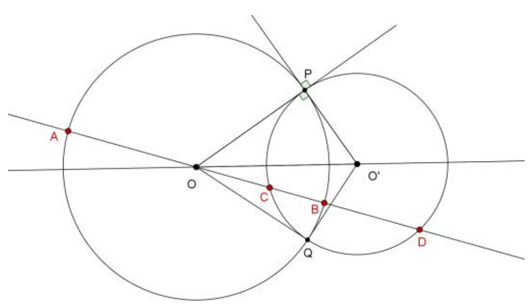


Figura 5.11

$(AB,CD) = -1$

12. La figura homotética a una circunferencia de radio *r* es otra circunferencia con centro en el punto homotético a su centro y radio *kr,* donde *k* es la constante de homotecia.

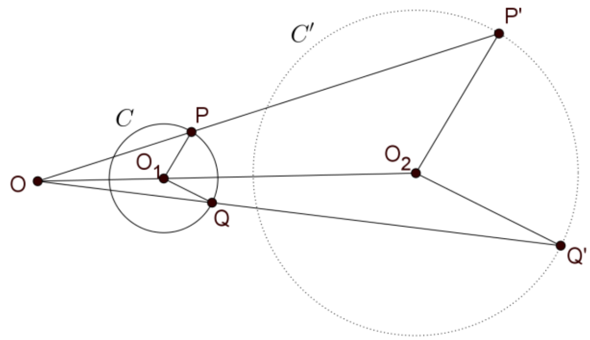


Figura 5.12

$O_2P' = kO_1P$

13. Dos circunferencias no concéntricas son homotéticas en dos formas. Los dos centros de homotecia son conjugados armónicos con respecto a los centros de los círculos. A los centros de homotecia se les llama centro interno o externo, dependiendo de que estén en el interior o en el exterior del segmento determinado por los centros de las circunferencias.

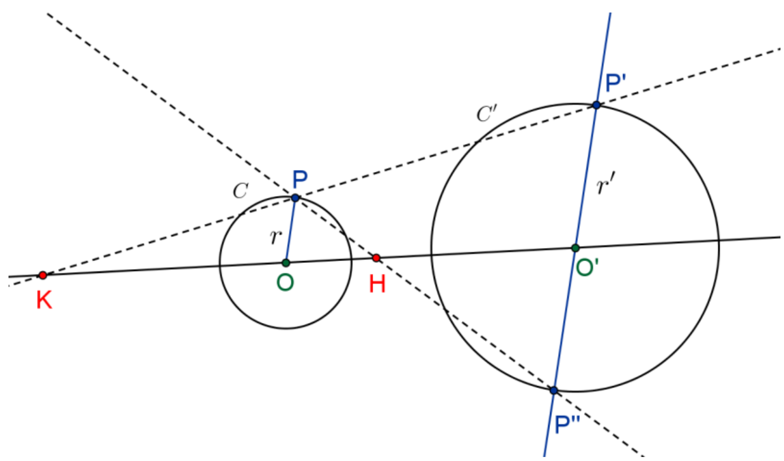


Figura 5.13

$$\frac{OK}{KO'} = -\frac{r}{r'}, \frac{OH}{HO'} = \frac{r}{r'}$$

14. La circunferencia de similitud de dos circunferencias no concéntricas y de radios diferentes, es la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une sus centros de homotecia, también llamados centros de similitud. La circunferencia de similitud de dos circunferencias no concéntricas es el lugar geométrico de los puntos tales que la razón de sus distancias a los centros de las circunferencias es igual a la razón entre sus radios.

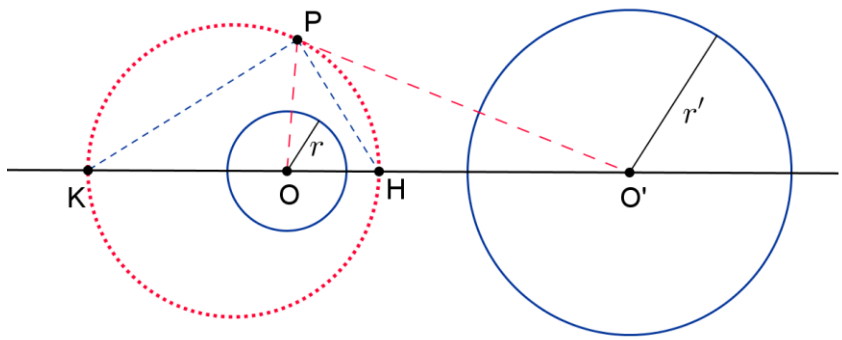


Figura 5.14

$$\frac{PO}{PO'} = -\frac{r}{r'},$$

$PK \perp PH$, *bisectrices del ángulo OPO'*

15. Los puntos medios de los lados de un triángulo, los pies de sus alturas y los puntos medios de los segmentos que unen sus vértices al ortocentro están en una circunferencia, llamada de los 9 puntos.

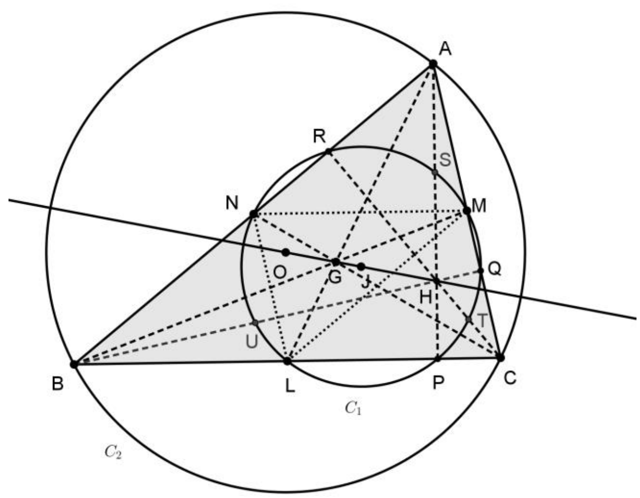


Figura 5.15

L, M, y N puntos medios de los lados del triángulo ABC, P, Q y R los pies de sus alturas, S, T y U puntos medios de los segmentos que unen sus vértices al ortocentro

O circuncentro del triángulo, J centro de la circunferencia de los 9 puntos, G centroide y H ortocentro. G y H centros de homotecia del circuncírculo y la circunferencia de los 9puntos.

Actividad 46

Para la realización de las siguientes construcciones utilice el programa Geogebra.

1. Construya tres puntos que tengan la misma potencia con respecto a dos circunferencias dadas. Analice los diferentes casos dependiendo de la posición relativa de las circunferencias. ¿Qué pasa con las circunferencias concéntricas?

2. Haga una hipótesis sobre el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con respecto a dos circunferencias dadas.
3. Construya el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con respecto a una circunferencia dada.
4. La bisectriz del ángulo en A del triángulo ABC corta BC en L. Si A y B permanecen fijos y el punto C describe una circunferencia cuyo centro es A, describa el lugar geométrico de los puntos L.
5. Construya una circunferencia que sea ortogonal a una circunferencia dada y que pase por un punto dado P.
6. Construya un triángulo dados los pies de sus alturas.

Actividad 47

1. Dadas dos circunferencias ortogonales, demuestre que no es posible que el centro de cualquiera de ellas se encuentre en el interior o sobre la otra.

5.2. Eje radical de dos circunferencias

Definición 5.2.1 El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con respecto a éstas.

Como se vio en la Actividad 46,1, es posible construir puntos que tienen la misma potencia con respecto a dos circunferencias dadas. Esto asegura que el lugar geométrico no es vacío.

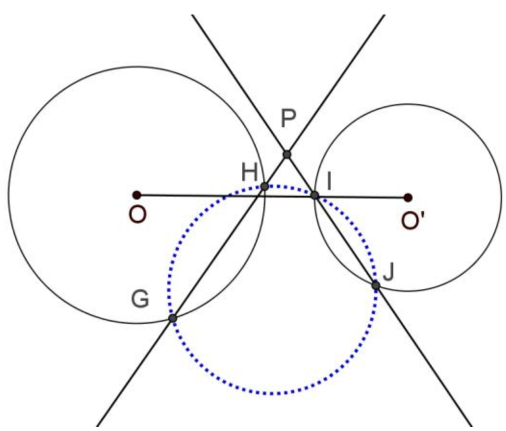


Figura 5.16a

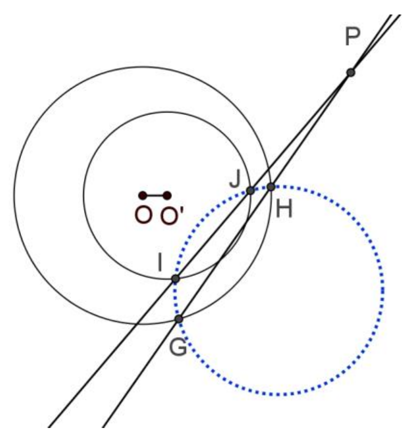


Figura 5.16b

Se muestran dos ejemplos de cómo se encuentra un punto en el eje radical de las circunferencias con centro en O y O′. ¿Por qué la potencia de P es la misma para las dos circunferencias?

De esta forma se pueden construir varios puntos en el eje radical de dos circunferencias, pero todavía no se conoce cuál es el lugar geométrico que contiene a estos puntos. Se verá primero el caso en el que las circunferencias son concéntricas.

Si se realiza la misma construcción que en los casos anteriores para encontrar los puntos que tienen la misma potencia, se tiene que si:

O es el centro de las circunferencias concéntricas y *C* el centro de una circunferencia que corta a las dos circunferencias en *G* y *H* y en *I* y *J* respectivamente entonces *CO* es perpendicular a *GH* y también a *IJ*.

Por lo tanto, *GH* es paralela a *IJ* y el punto *P* es un punto al infinito.

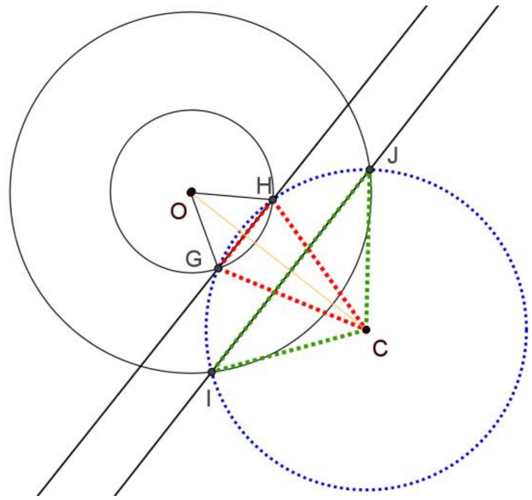


Figura 5.16c

Como para cualquier circunferencia que corte a las dos circunferencias concéntricas se tiene que el punto *P* es un punto al infinito, se define el eje radical de dos circunferencias concéntricas como la recta al infinito.

En el caso que las dos circunferencias no sean concéntricas, el eje radical de las dos circunferencias también es una recta.

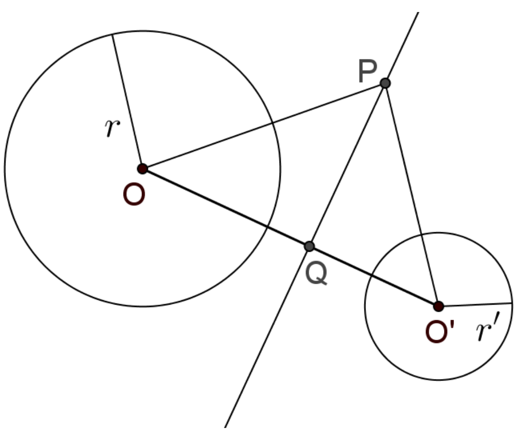


Figura 5.17

Sea *P* un punto que tiene la misma potencia con respecto a las circunferencias con centro en *O* y *O′* y radios *r* y *r′* respectivamente.

Se traza la perpendicular a *OO′* por *P*, sea *Q* la intersección de esta perpendicular con la recta *OO′*.

Como la potencia de *P* con respecto a las dos circunferencias es la misma se tiene que:

$$PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2$$

restando PQ^2 a los dos lados de la ecuación,

$$PO^2 - r^2 - PQ^2 = PO'^2 - r'^2 - PQ^2$$

$$OQ^2 - r^2 = QO'^2 - r'^2$$

$$OQ^2 - QO'^2 = r^2 - r'^2$$

$$(OQ - QO')(OQ + QO') = r^2 - r'^2$$

$$(OQ - QO') = \frac{r^2 - r'^2}{(OQ + QO')}$$

$$(OQ - QO') = \frac{r^2 - r'^2}{(OQ + QO')}$$

pero, ya que $OQ + QO' = OO'$ se tiene que,

$$(OQ - QO') = \frac{r^2 - r'^2}{(OO')} \quad ...(5.1)$$

Ahora bien, Q es el único punto en la recta *OO’* que cumple está igualdad; supóngase que existe otro punto *Q’* en la recta que la cumple, entonces,

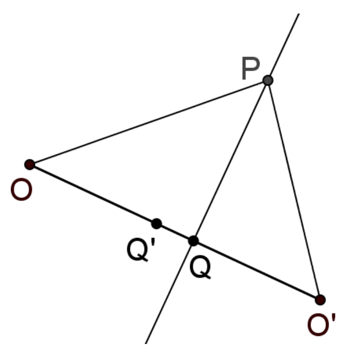


Figura 5.18

$$(OQ - QO') = (OQ' - Q'O')$$

$$(OQ - (QQ' + Q'O')) = ((OQ + QQ') - Q'O')$$

$$(OQ - QQ' - Q'O') = (OQ + QQ' - Q'O')$$

$$-QQ' = QQ'$$

$$2QQ' = 0$$

$$QQ' = 0$$

y los puntos Q y Q' coinciden. Por lo tanto, si un punto P tiene la misma potencia con respecto a dos circunferencias con centros en los puntos O y O', entonces P está en la perpendicular a OO' que pasa por el punto Q tal que cumple la igualdad (5.1).

Ahora bien, si P está en la perpendicular a *OO’* por el punto Q de este segmento que cumple esta igualdad, entonces sus potencias son iguales con respecto a las dos circunferencias, como se puede demostrar revirtiendo los pasos que se realizaron para llegar a la ecuación (5.1). Esto es, se ha demostrado el teorema 5.2.1 que se enuncia a continuación.

Teorema 5.2.1 El eje radical de dos circunferencias no concéntricas es una recta perpendicular a la línea de sus centros y que pasa por el punto Q en la recta OO’ que cumple con la ecuación (5.1). A esta recta se le llama el eje radical de dos circunferencias. En el caso de las circunferencias concéntricas su eje radical es la recta al infinito.

Actividad 48

Demuestre:

1. Dadas dos circunferencias, si una de ellas interseca a su eje radical, entonces la otra también lo hace.
2. El eje radical de dos circunferencias que se intersecan pasa por sus puntos de intersección.
3. El eje radical de dos circunferencias que son tangentes pasa por su punto de tangencia.
4. Los ejes radicales de tres circunferencias tomadas por pares coinciden o se intersecan en un punto. Analiza los diferentes casos cuando los tres centros son colineales y cuando no lo son. A este punto se le llama *el centro radical* de las tres circunferencias.
5. Dado un triángulo ABC, el centro radical de las circunferencias de diámetro AB, BC y CA es el ortocentro del triángulo.
6. Dado un triángulo ABC y H su ortocentro, el centro radical de las circunferencias que tienen BC, BH y CH como diámetros es el punto A.
7. Si tres circunferencias que no se intersecan tienen centro radical O, los puntos de contacto de las tangentes desde O a las tres circunferencias están sobre otra circunferencia.
8. Si dos circunferencias concéntricas tienen el mismo eje radical con una tercera circunferencia, entonces la tercera circunferencia es concéntrica con las otras dos.
9. Si dos circunferencias tienen cuatro tangentes comunes, los puntos medios de los segmentos determinados por los puntos de tangencia en cada una de ellas son colineales.
10. Las tangentes a dos circunferencias en puntos antihomólogos, se intersecan en el eje radical de las circunferencias.
11. El eje radical del incírculo y de los excírculos de un triángulo tomadas por pares son las bisectrices de los ángulos del triángulo cuyos vértices son los puntos medios los lados de un triángulo.

5.3. Circunferencias ortogonales a dos circunferencias

Teorema 5.3.1 Una circunferencia ortogonal a dos circunferencias dadas tiene su centro en el eje radical de las dos circunferencias.

Demostración

Sean C y C' dos circunferencias no concéntricas con centro en O y O' y con radios r y r' respectivamente.

Sea E una circunferencia ortogonal a las circunferencias C y C', con centro en P. Se demostrará que P está en el eje radical de las dos circunferencias.

Sean R y R' las intersecciones de la circunferencia E con las circunferencias C y C', respectivamente.

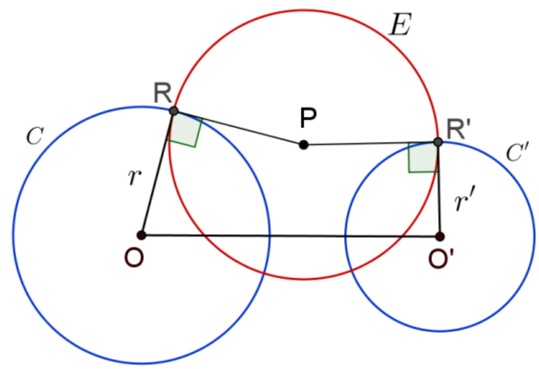


Figura 5.19

Ya que la circunferencia E es ortogonal a las circunferencias C y C', sus radios a los puntos de intersección PR y PR' son tangentes a estas circunferencias respectivamente. Por tanto, $PR = PR' \Rightarrow (PR)^2 = (PR')^2$, lo que implica que la potencia de P con respecto a C y C' es la misma y P está en su eje radical.

Observe que la demostración es la misma cuando las circunferencias se intersecan, siempre que no sean concéntricas, como en la figura 5.20.

Sin embargo, en el caso que las circunferencias sean concéntricas la situación es un poco diferente.

Supóngase que C y C' son dos circunferencias concéntricas como en la figura 5.21.

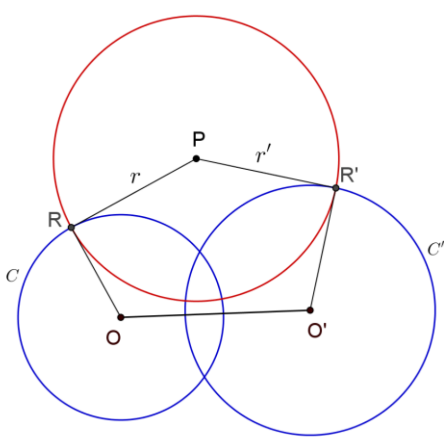


Figura 5.20

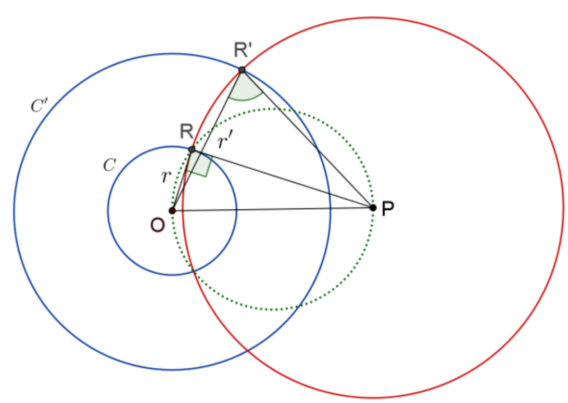


Figura 5.21

El centro de cualquier circunferencia ortogonal a las dos circunferencias concéntricas tiene que estar fuera de las dos circunferencias (Actividad 47). Si se supone que P es el centro de una circunferencia ortogonal a las dos circunferencias concéntricas, se tiene que $\angle ORP$ es recto, por lo que la circunferencia de diámetro *OP* pasa por *R*, pero también el $\angle OR'P$ es recto, por lo que también el punto *R′* está en la circunferencia con diámetro *OP*. Por lo tanto, la mediatriz de *RR′* pasa por el punto medio de *OP*, pero como *R* y *R′* también están en la circunferencia con centro en *P*, su mediatriz también pasa por *P*, lo cual es una contradicción y no existe una circunferencia de radio finito ortogonal a las dos circunferencias concéntricas.

Sin embargo, ya que el eje radical de dos circunferencias concéntricas es la recta al infinito, indagaremos sobre las circunferencias con centro en un punto al infinito y por tanto de radio infinito. Las circunferencias con centro en la recta l y que pasan por el punto *A*, mientras más se aleja el centro del punto *A*, esto es, mientras más crece el radio, las circunferencias se acercan más a la tangente a todas ellas por el punto *A*. Esto lleva a la siguiente definición.

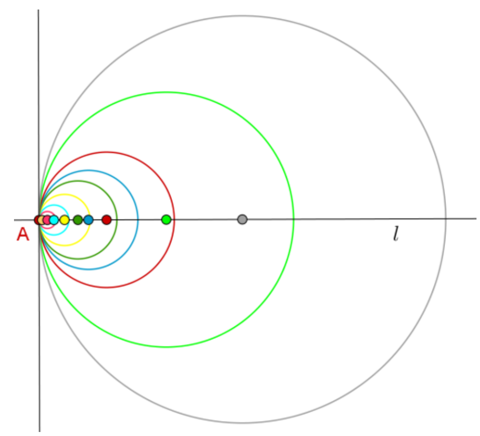


Figura 5.22

Definición 5.3.1 Una recta l cualquiera puede considerarse una circunferencia de radio infinito, con centro en el punto al infinito en la dirección de su perpendicular.

Considerando esta ampliación del concepto de circunferencia, se puede determinar una circunferencia ortogonal a dos circunferencias concéntricas.

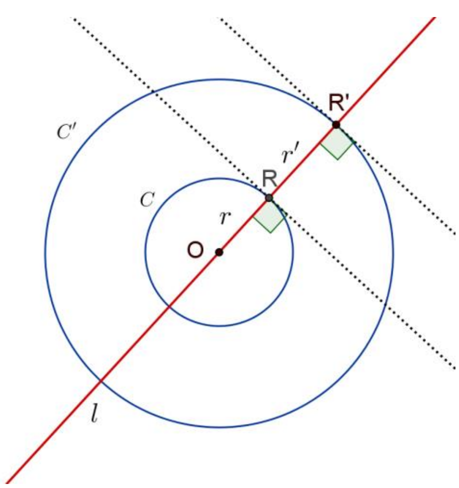


Figura 5.23

Sean *C* y *C′* dos circunferencias concéntricas. Sea l un diámetro de las dos circunferencias. El ángulo entre l y cada una de las circunferencias, o sea el ángulo entre la recta l y sus tangentes, es recto, por lo que considerando esta recta como circunferencia de radio infinito es ortogonal a las dos circunferencias dadas. Además, el centro de esta circunferencia es el punto al infinito en la dirección perpendicular a la misma. Pero, como ya se había visto el eje radical de dos circunferencias concéntricas es la recta al infinito. Por lo tanto, el teorema 5.3.1 se cumple para cualquier par de circunferencias.

Teorema 5.3.2 Si una circunferencia tiene centro en el eje radical de dos circunferencias y es ortogonal a una de ellas, entonces es ortogonal a la otra.

Demostración

Sean C y C' dos circunferencias. Sea PQ su eje radical y sea E una circunferencia con centro en P y ortogonal a la circunferencia C. Sean R y R' las intersecciones de E con las circunferencias C y C'. Ya que E es ortogonal a C, PR es tangente a C en R, por tanto, la potencia de P con respecto a C es PR^2. Como P está en el eje radical de C y C', la potencia de P respecto a C' es también igual a PR^2.

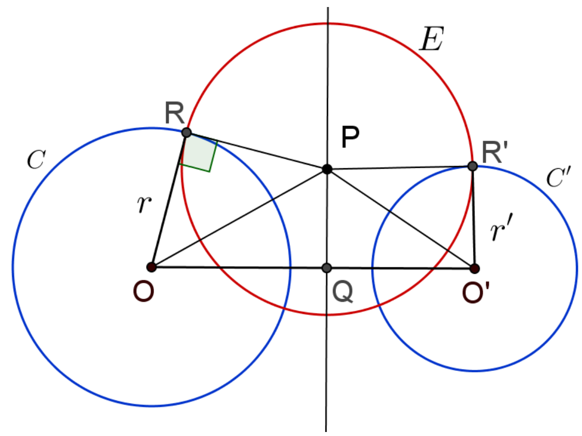


Figura 5.24

La potencia de P con respecto a C' es $(PO')^2 - (r')^2$, que por hipótesis es igual a PR^2, pero $PR^2 = (PR')^2$ por ser PR y PR' radios de la circunferencia E; por lo tanto, $(PO')^2 - (r')^2 = (PR')^2$ y el triángulo $PO'R'$ es rectángulo, de donde PR' y r' son perpendiculares y la circunferencia E es también ortogonal a la circunferencia C'. Se puede observar que la demostración es independiente de que las circunferencias C y C' sean ajenas o se intersequen.

En el caso de que las circunferencias sean concéntricas, el punto P es un punto al infinito y la circunferencia E es una recta. Para que E sea ortogonal a C, es un diámetro de C, pero como C y C' son concéntricas, entonces E es también un diámetro de C' y E es ortogonal a C'.

Teorema 5.3.3 Todas las circunferencias ortogonales a dos circunferencias que no se intersecan, intersecan la línea de los centros en dos puntos fijos y todas las circunferencias ortogonales a dos circunferencias que se intersecan no cortan la línea de los centros.

Demostración

Sean C y C' dos circunferencias que no se intersecan. Sea l su eje radical y sea E ortogonal a las dos circunferencias. Sea P el centro de E, entonces P está en l (Teorema 5.3.1). Sea Q la intersección de l con OO'. Sean R y R' las intersecciones de E con las circunferencias C y C', por tanto, los triángulos PRO y PQO son rectángulos. Se tiene entonces,

$$PR^2 = PO^2 - r^2 \text{ y } PQ^2 = PO^2 - OQ^2.$$

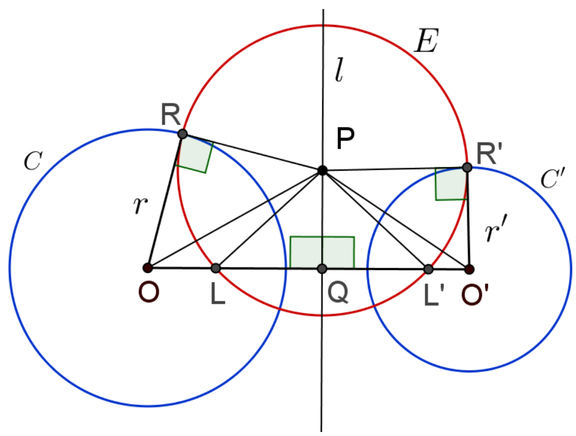


Figura 5.25

Pero si C y C' no se intersecan, entonces $OQ > r$ y $PQ^2 < PR^2$ de donde, $PQ < r$ y la circunferencia E intersecta OO' en dos puntos a los que se llama L y L'. Se tiene además que,

$$PL^2 = LQ^2 + QP^2$$

$$LQ^2 = PL^2 - QP^2$$

$$LQ^2 = PR^2 - QP^2 = PO^2 - r^2 - QP^2$$

$$LQ^2 = PO^2 - r^2 - QP^2 = OQ^2 - r^2$$

Esto es, LQ es fijo para cualquier circunferencia con centro en l y ortogonal a C. De manera análoga se demuestra que $L'Q^2 = O'Q^2 - (r')^2$.

De acuerdo con este resultado, cualquier circunferencia ortogonal a dos circunferencias que no se intersecan, corta a su línea de los centros en dos puntos fijos L y L'. Además, como el centro P de la circunferencia por L y L' está en la recta l, ésta es la mediatriz de L y L', por tanto, estos dos puntos son simétricos respecto de Q. A L y L' se les llama los puntos límite de este par de circunferencias.

Sean ahora C y C' dos circunferencias que se intersecan. Sea l su eje radical. La recta l pasa por los puntos de intersección, A y B, de las dos circunferencias (Actividad 48, 2). Sea E ortogonal a las dos circunferencias.

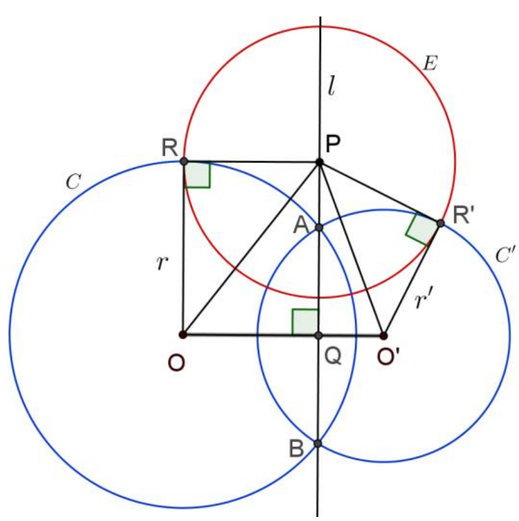


Figura 5.26

Sea P el centro de E, entonces P esta en l (Teorema 5.3.1); pero, P está fuera del segmento AB (Actividad 47).

Sea Q la intersección de l con OO'. Sean R y R' las intersecciones de E con las circunferencias C y C', por tanto, los triángulos PRO y PQO son rectángulos. Se tiene entonces,

$$PR^2 = PO^2 - r^2 \text{ y } PQ^2 = PO^2 - OQ^2.$$

Pero, si C y C' se intersecan, se tiene entonces que $OQ < r$ y $PQ^2 > PR^2$ de donde, $PQ > r$ y la circunferencia E no interseca OO'.

Actividad 49

Demuestre que:

1. Si dos circunferencias son tangentes, entonces una circunferencia ortogonal a las dos, es tangente a su línea de los centros en el punto de tangencia de las circunferencias dadas.
2. Si dos circunferencias cortan ortogonalmente a otras dos, los ejes radicales de cada par son la línea de los centros del otro par.
3. El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que bisecan dos circunferencias dadas es una recta paralela al eje radical de las circunferencias.
4. Si L y L' son los puntos límites de dos circunferencias C_1 y C_2 que no se intersecan, entonces cualquier circunferencia que pasa por L y L' es ortogonal a C_1 y C_2.

Actividad 50

Realiza las siguientes construcciones

1. Una circunferencia que pase por un punto dado y que sea ortogonal a dos circunferencias dadas. Considera los diferentes casos: las dos circunferencias que no se intersecten y ajenas, las dos circunferencias que no se intersecten, pero una contenida en la otra, las dos circunferencias tangentes, las dos circunferencias con dos puntos de intersección, las dos circunferencias concéntricas.
2. Una circunferencia que pase por un punto P dado y que tenga a una recta l dada como eje radical con una circunferencia con C, también dada. Considera los diferentes casos para P, C y l.
3. Una circunferencia tal que las tangentes a ella desde tres puntos dados, no colineales, tengan longitudes dadas.
4. Una circunferencia que pase por dos puntos dados y tangente a una circunferencia dada.

5.4. Familias coaxiales: definición y propiedades básicas

Definición 5.4.1 Un conjunto de circunferencias tales que cada par de ellas tienen el mismo eje radical es una familia coaxial. Al eje radical de cada pareja se le llama el eje radical de la familia coaxial.

En las figuras siguientes se muestran algunos ejemplos de familias coaxiales.

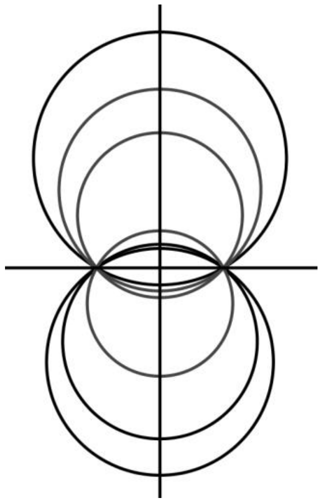


Figura 5.27

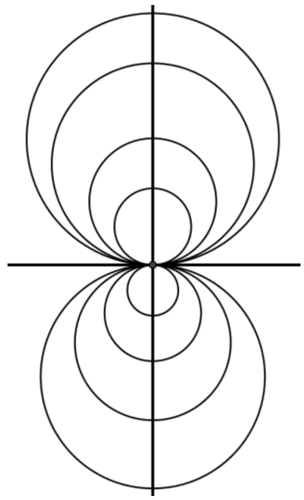


Figura 5.28

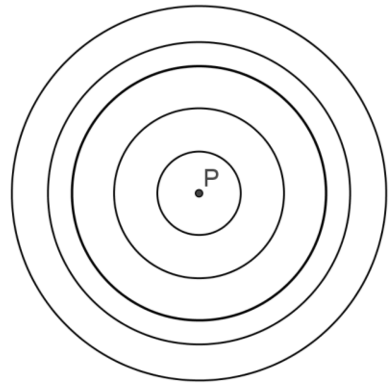


Figura 5.29

Algunas de las propiedades evidentes de las familias coaxiales son:

a) El lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de todas las circunferencias de la familia es su eje radical. (Definiciones 5.2.1 y 5.4.1)

b) Los centros de las circunferencias de una familia coaxial son colineales, si las circunferencias no son concéntricas. (Teorema 5.2.1)

c) Si dos puntos tienen la misma potencia respecto a tres circunferencias, entonces las circunferencias son coaxiales. (Definiciones 5.2.1 y 5.4.1)

d) Dos circunferencias pertenecen a una única familia coaxial. (Definiciones 5.2.1 y 5.4.1)

e) Dos circunferencias determinan una única familia coaxial. (Definiciones 5.2.1 y 5.4.1)

f) Si una circunferencia tiene centro en el eje radical de la familia y es ortogonal a una de ellas, entonces es ortogonal a todas las circunferencias de la familia. (Teorema 5.3.3)

g) Si una circunferencia es ortogonal a dos circunferencias de la familia coaxial, entonces es ortogonal a todas las circunferencias coaxiales. (Teoremas 5.3.1 y 5.3.3)

5.5. Diferentes tipos de familias coaxiales

A. Si dos circunferencias de la familia coaxial intersecan al eje radical en dos puntos, entonces todas las circunferencias de la familia pasan por esos dos puntos.

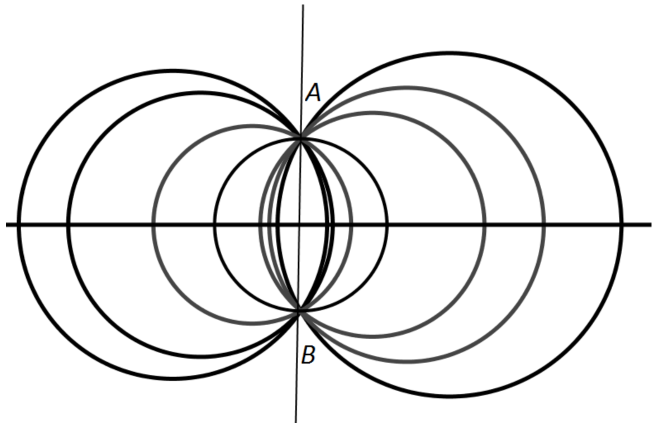


Figura 5.30

Sean A y B los puntos en que las circunferencias de la familia intersecan al eje radical, por lo tanto, la recta AB es su eje radical (Actividad 48,2) y por la definición de familia coaxial, esta recta es el eje radical de la familia.

La línea de los centros de la familia es la mediatriz de la cuerda común AB.

¿Se podrá construir una circunferencia de la familia por cualquier punto del plano?

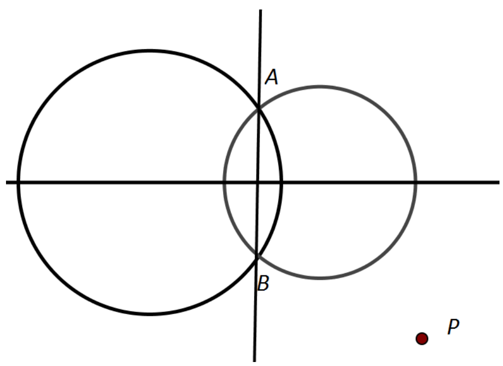


Figura 5.31a

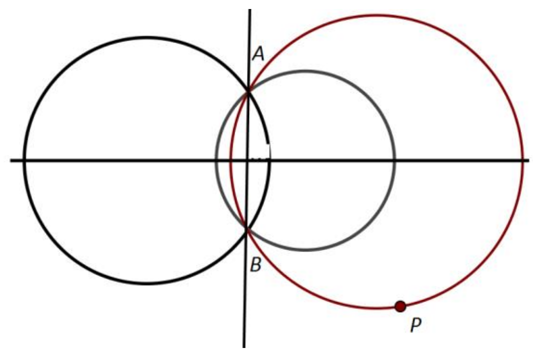


Figura 5.31b

Ya que dadas dos circunferencias determinan a la familia, para que la construcción sea más clara solamente se presentan dos de ellas. Dado cualquier punto P en el plano, no colineal con A y B, se puede construir una única circunferencia que pasa por A, B y P (propiedad b, sección 5.1). Esta circunferencia tiene con las dos circunferencias dadas a la recta AB como eje radical, por lo tanto, pertenece a la familia coaxial determinada por ellas.

Los puntos por los que no pasa ninguna circunferencia de la familia son los puntos colineales con A y B, es decir los del eje radical; sin embargo, si consideramos al eje radical como una circunferencia de radio infinito de esta familia, puede decirse que por cualquier punto del plano pasa una circunferencia de la familia. Su centro es el punto al infinito de la línea de los centros de la familia.

B. Si dos circunferencias de la familia coaxial intersecan al eje radical en un único punto, entonces todas las demás circunferencias de la familia intersecan al eje radical en ese punto.

Sea A el punto en el que las circunferencias son tangentes al eje radical, por lo tanto, de acuerdo con la actividad 48,3, la tangente común es el eje radical de cualquier par de circunferencias de la misma.

Por tanto, la línea de los centros es la perpendicular al eje radical por el punto de tangencia.

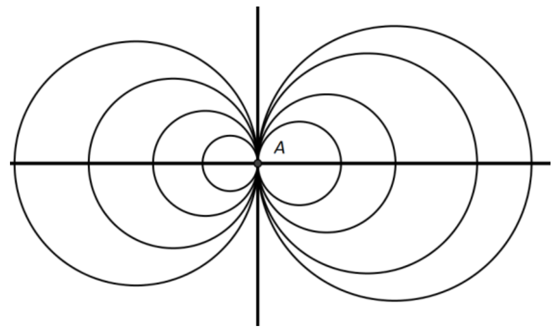


Figura 5.32

¿Se podrá construir una circunferencia de la familia por cualquier punto del plano?

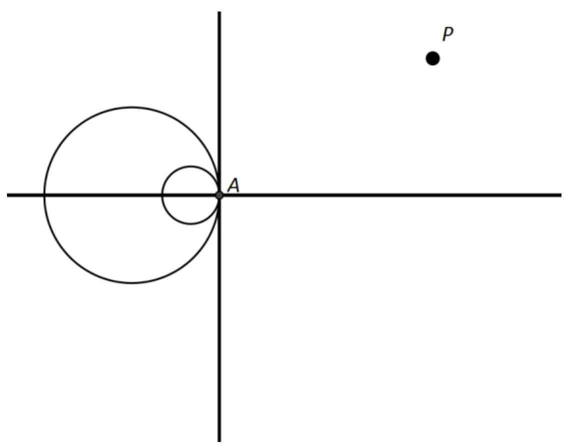


Figura 5.33a

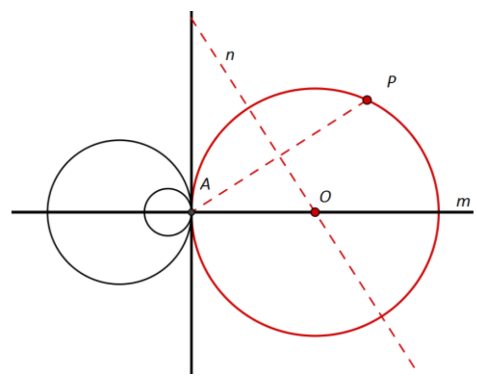


Figura 5.33b

Dado cualquier punto P en el plano, que no esté en el eje radical, se puede construir una única circunferencia que pasa por P y que pertenezca a la familia, es decir tangente al eje radical en A. Para ello, se traza el segmento AP y su mediatriz n. Si O es la intersección de n con m la línea de los centros de la familia, la circunferencia con centro en O y que pasa por A, es tangente al eje radical y también pasa por P. Esta circunferencia tiene con las dos circunferencias dadas a la tangente en A como eje radical, por lo tanto, pertenece a la familia coaxial determinada por ellas.

Los puntos por los que no pasa ninguna circunferencia de la familia son los puntos en la tangente a las circunferencias, el eje radical; sin embargo, si consideramos al eje radical como una circunferencia de radio infinito de esta familia, puede decirse que por cualquier punto del plano pasa una circunferencia de la familia. Su centro es el punto al infinito de la línea de los centros de la familia.

C. Si ningún par de circunferencias de la familia coaxial interseca al eje radical, se tienen dos casos: cuando las circunferencias son concéntricas y cuando no lo son.

En el caso de las circunferencias concéntricas:

Como ya se ha visto (teorema 5.2.1), el eje radical de dos circunferencias concéntricas es la recta al infinito; de esta forma, cualquier par de circunferencias concéntricas tiene a la recta al infinito como su eje radical, por tanto, no lo cortan.

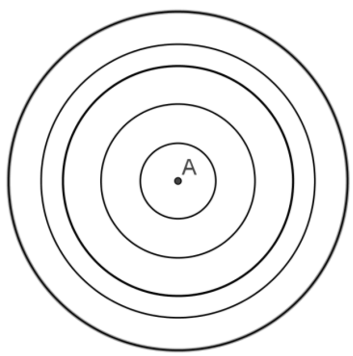


Figura 5.34

Si se considera la familia de las circunferencias con centro en un punto A, para cualquier par de ellas se tiene que su eje radical es la recta al infinito y por tanto son coaxiales.

En este caso la línea de los centros se reduce a un solo punto, el punto A.

En este caso es inmediato cómo construir una circunferencia de la familia que pasa por un punto dado P en el plano.

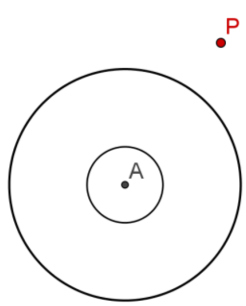


Figura 5.35a

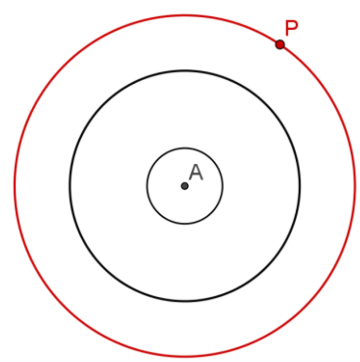


Figura 5.35b

Se construye la circunferencia con centro en A y que pase por P (V postulado). El único punto por el que no se puede hacer esto es por A, el centro de la familia coaxial; sin embargo, se puede considerar al punto A como una circunferencia de la familia, de radio 0, y se tiene entonces que por cada punto del plano hay un elemento de la familia.

En el caso de circunferencias no concéntricas:

Si se tienen dos circunferencias no concéntricas de una familia coaxial que no intersecan al eje radical, entonces ninguna de las circunferencias de la familia lo intersecta (Actividad 48,1).

Ya que todos los centros de las circunferencias de la familia son colineales (sección 5.4, propiedad d), dadas dos circunferencias de la familia C_1 y C_2 con centro en O_1 y O_2, el centro de las demás circunferencias de la familia están en la recta m determinada por O_1 y O_2. Sea l el eje radical de C_1 y C_2. De acuerdo con la definición de familia coaxial, cualquier otra circunferencia de la familia tiene con cada una de las circunferencias dadas a la recta l como eje radical.

En este caso, para poder visualizar la forma que tiene esta familia, se hará uso de una circunferencia ortogonal a las dos circunferencias dadas.

Para ver si por cualquier punto del plano pasa una circunferencia de la familia, se realizarán las siguientes construcciones.

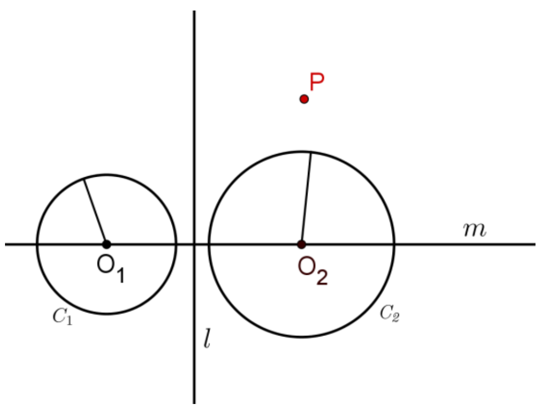


Figura 5.36a

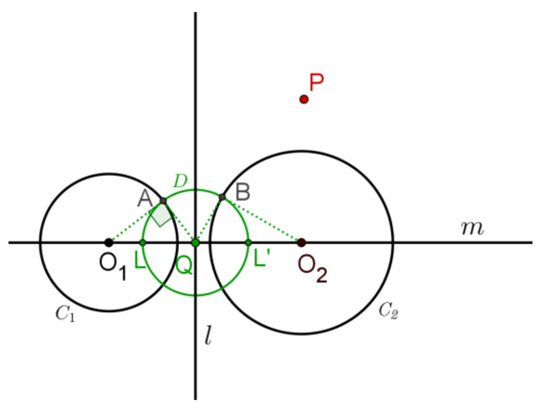


Figura 5.36b

Sean C_1 y C_2 dos circunferencias que no se intersecan, sean O_1 y O_2 sus centros, sea l su eje radical, m la línea de los centros y P un punto cualquiera en el plano tal que $P \notin l$. (Figura 5.36a). Para construir una circunferencia del sistema, que pase por un punto P cualquiera del plano, se hará uso de una circunferencia auxiliar, ortogonal a C_1 y C_2 y que pase por P. Primero se traza cualquier circunferencia D con centro en algún punto del eje radical y ortogonal a C_1 y C_2, con la finalidad de determinar los puntos límite del sistema. Para trazar esta circunferencia, se toma como centro el punto Q, por ejemplo, y se traza la tangente desde Q a C_1; si A es el punto de tangencia, la circunferencia D con centro en Q y radio QA es ortogonal a C_1 por construcción y por el teorema 5.3.2 es ortogonal a C_2. Entonces L y L', los puntos de intersección de D con m son los puntos límite del sistema determinado por C_1 y C_2 (Figura 5.36b).

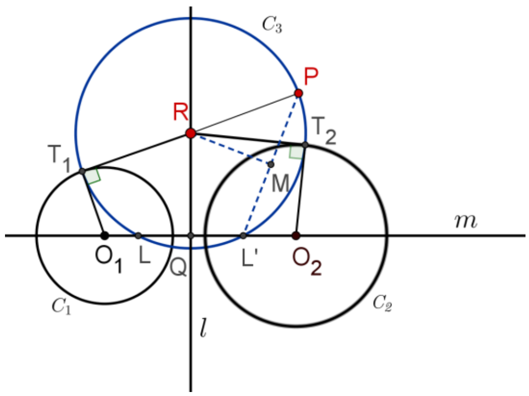


Figura 5.36c

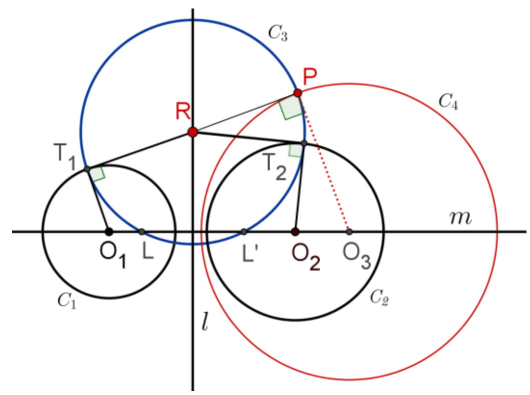


Figura 5.36d

Se construye la circunferencia C_3 que pasa por L, L' y P, cuyo centro es un punto R en el eje radical de C_1 y C_2, que es la mediatriz de L y L'. En la figura se ha omitido la circunferencia D para mayor claridad en la misma, ya que su importancia radica únicamente en la localización de L y L'. La circunferencia C_3 es ortogonal a C_1 y C_2 (actividad 49,4) y por construcción pasa por P (Figura 5.36c).

Se traza por P una tangente a C_3. Sea O_3 la intersección de esta tangente con m la línea de los centros de C_1 y C_2. Sea C_4 la circunferencia con centro en O_3 y radio O_3P. Por construcción C_3 es ortogonal a C_4. Ya que C_3 es ortogonal a C_1 y C_4, se tiene que l es su eje radical y de la misma forma, l es el eje radical de C_2 y C_4, lo que implica que C_4 es un miembro de la familia coaxial determinada por C_1 y C_2.

Los puntos por los que no pasa ninguna circunferencia de la familia son los puntos del eje radical; sin embargo, si consideramos al eje radical como una circunferencia de radio infinito de esta familia, puede decirse que por cualquier punto del plano pasa una circunferencia de la familia. Su centro es el punto al infinito de la línea de los centros de la familia.

De esta forma ha quedado demostrado el siguiente teorema:

Teorema 5.5.1 Dada cualquier familia coaxial de circunferencias, por cada punto del plano pasa un miembro de la familia.

5.6. Familias ortogonales a las familias coaxiales

Dado un sistema coaxial de circunferencias, las circunferencias ortogonales a estas circunferencias forman una familia coaxial. A esta familia se le llama la familia conjugada a la familia dada.

Si la familia coaxial es del tipo que no se intersecan, entonces las circunferencias ortogonales pasan por dos puntos fijos L y L' y por tanto forman una familia coaxial del tipo que se intersecan en dos puntos. (Teoremas 5.3.3)

De la misma forma, si la familia coaxial es del tipo que se interseca en dos puntos fijos, la familia conjugada es del tipo que no se interseca.

Resumiendo, dados dos puntos distintos *L* y *L′* existen dos familias de circunferencias coaxiales: la que tiene estos puntos como puntos límite y la familia de circunferencias ortogonales que pasa por los puntos *L* y *L′*. La línea de los centros de una familia es el eje radical de la otra.

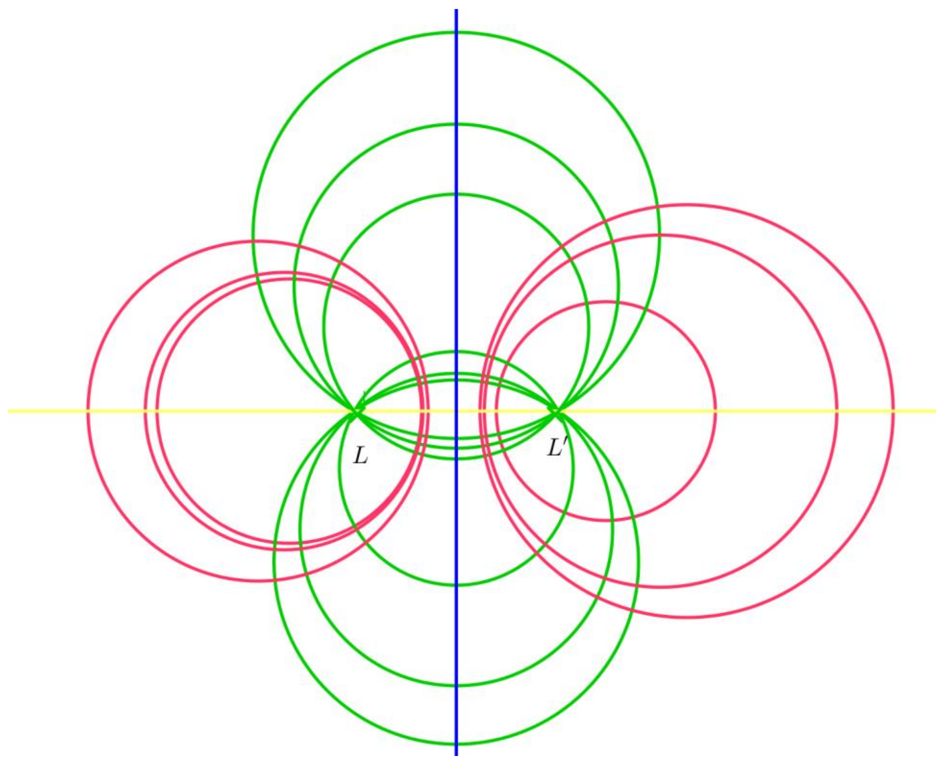


Figura 5.37

Los casos de familias coaxiales tangentes y concéntricas se dejan al lector.

Actividad 51

Realice las siguientes construcciones

1. Dada cualquier $r>0$, construya una circunferencia de una familia coaxial dada que tenga radio *r*. Analice el caso para los diferentes tipos de familias coaxiales y determine, en su caso, para qué tipo de familia existen restricciones para *r*.
2. Dado un punto en la línea de los centros de una familia coaxial, construya una circunferencia de la familia con centro en ese punto. Analice el caso para los diferentes tipos de familias coaxiales y determine, en su caso, para qué tipo de familia existen restricciones.

3. Dados un punto, una circunferencia y una recta, trace la circunferencia que pase por el punto y que tenga con la circunferencia dada a la recta dada como eje radical.
4. Construya una circunferencia de un sistema coaxial dado que sea tangente a una recta dada. ¿Existe siempre solución? En caso de que no siempre exista solución, diga en qué casos no la hay.
5. Construir una circunferencia de un sistema coaxial dado que sea tangente a una circunferencia dada. ¿Existe siempre solución? En caso de que no siempre exista solución, diga en qué casos no la hay.
6. Dada una familia coaxial de circunferencias tangentes, construya su familia conjugada.
7. Dada una familia coaxial de circunferencias concéntricas, construya su familia conjugada.

Actividad 52

Demuestre que:

1. Si C y C' son dos círculos que no se intersecan y D una circunferencia ortogonal a C y C' que corta a su línea de los centros en L y L', entonces los círculos C y C' son círculos de Apolonio respecto de los puntos L y L'.
2. Los ejes radicales de un círculo y los círculos de un conjunto radical son concurrentes.
3. Si dos circunferencias tienen una tangente común, los puntos en los que ésta toca a las dos circunferencias son conjugados armónicos con respecto a los puntos en los cuáles es cortada por cualquier circunferencia coaxial a ellas.
4. Dos circunferencias y su circunferencia de similitud son coaxiales.
5. Las circunferencias cuyos diámetros son las diagonales de un cuadrilátero completo son coaxiales; los ortocentros de los cuatro triángulos determinados por los cuatro lados del cuadrilátero tomados por tercias son colineales y los puntos medios de las diagonales son colineales.