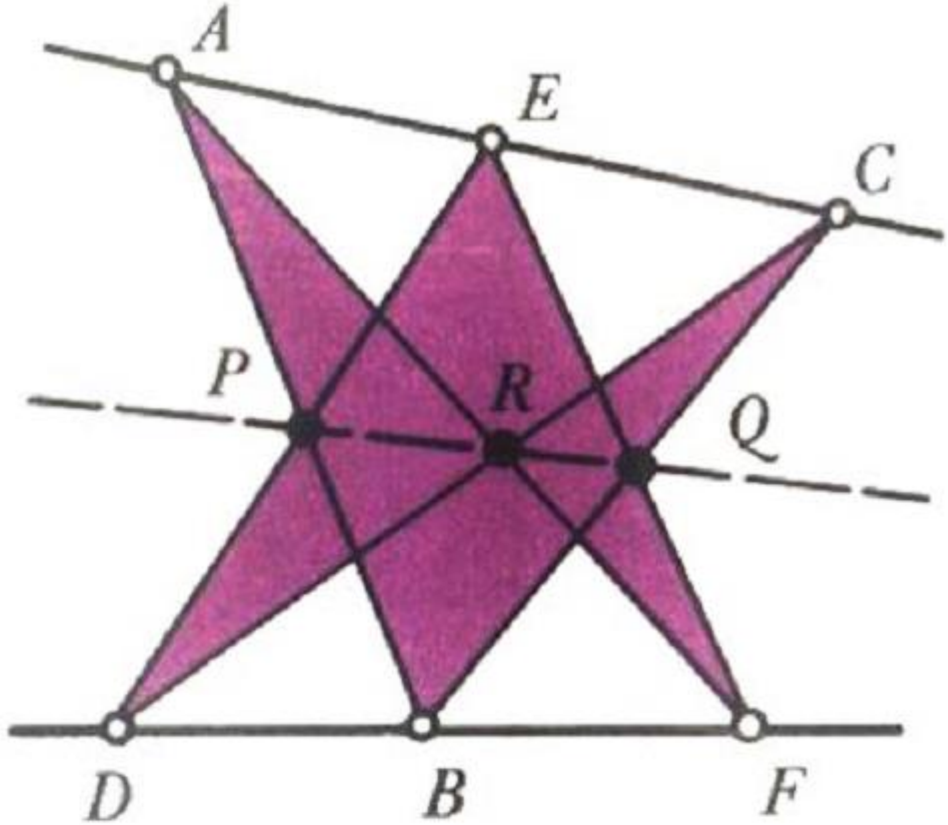
UNIDAD CUATRO

Algunos teoremas importantes

4.1 Teoremas de Ceva y Menelao
4.2 Teorema de Desargues
4.3 Cuadrángulos y cuadriláteros completos
4.4 Cuadrángulo completo
4.5 Cuadrilátero completo
4.6 Dualidad



Teorema de Pappus

4.1 Teoremas de Ceva y Menelao

Los llamados *teoremas de configuración* expresan las relaciones entre un número finito de puntos y de rectas.

En general un teorema de configuración se formula de tal forma que del hecho de que algunos puntos son colineales o bien algunas de las rectas son concurrentes, se deduce que algunos otros puntos son colineales o algunas otras rectas son concurrentes.

Los teoremas de Ceva y Menelao son herramientas que permiten trabajar muchos problemas en los que intervienen la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas. Ambos están estrechamente relacionados, aun cuando el de Menelao es del siglo primero y el de Ceva del siglo XVII.

Una recta que pasa por un vértice de un triángulo pero que no coincide con ningún lado, se llama usualmente ***recta ceviana*** del triángulo.

Un punto que esté en un lado de un triángulo, pero que no coincida con ningún vértice, se llama usualmente ***punto de Menelao*** del triángulo para dicho lado.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Ceva) Tres cevianas AL, BM y CN de un triángulo ABC son concurrentes en el punto O si y sólo si:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

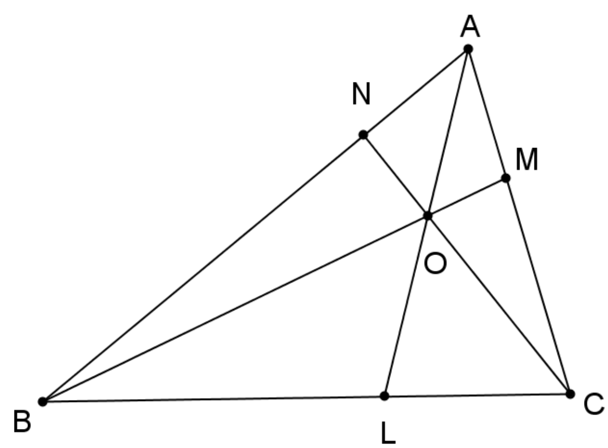


Figura 4.1

Demostración: Se traza por *A* una paralela a *BC*. Sean *S* y *T* las intersecciones de *BM* y *CN* con esta paralela, respectivamente.

$$\Delta\, BLO \sim \Delta\, SAO,$$

$$\frac{BL}{LO} = \frac{SA}{AO}; \quad (1)$$

$$\Delta\, OLC \sim \Delta\, OAT,$$

$$\frac{OL}{LC} = \frac{OA}{AT}; \quad (2)$$

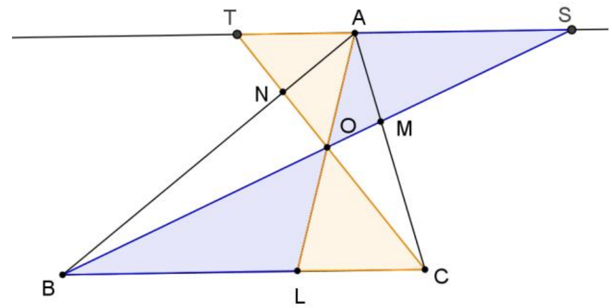


Figura 4.2

$$\Delta\, CMB \sim \Delta\, AMS,$$

$$\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{SA}; \quad (3)$$

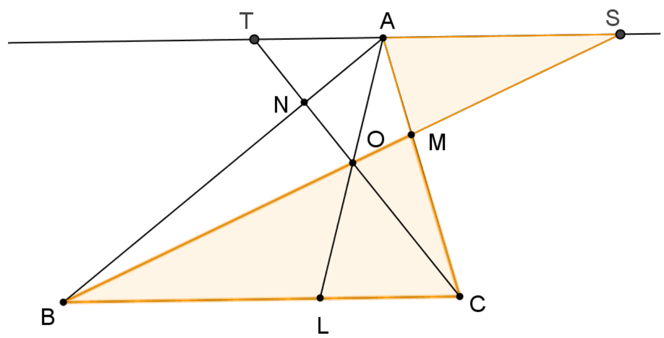


Figura 4.3

$$\Delta\, ANT \sim \Delta\, BNC,$$

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AT}{BC}; \quad (4)$$

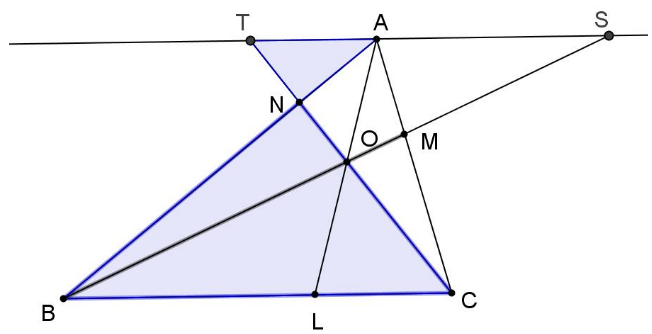


Figura 4.4

Multiplicando (1), (2), (3) y (4), se obtiene:

$$\frac{BL}{LO} \cdot \frac{OL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{SA}{AO} \cdot \frac{OA}{AT} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{AT}{BC}, \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Inversamente, supóngase que L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC y que la relación anterior se satisface. Sea O el punto de intersección de *BM* y *CN*. Se traza la recta *AO*. Sea *L'* el punto de intersección de *AO* con *BC*. Por el teorema de Ceva:

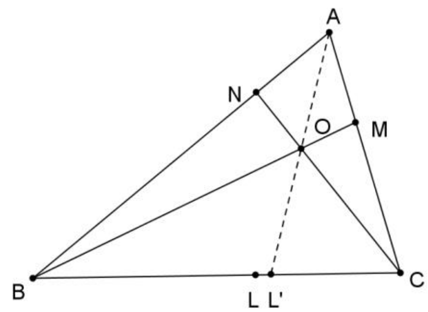


Figura 4.5

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA}=1,$$

por tanto,

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1,$$

de donde,

$$\frac{BL'}{L'C}=\frac{BL}{LC},$$

y por el teorema 3.2.1 se tiene que *L* = *L'*.

Teorema 4.1.2 (Teorema de Menelao) Si una recta interseca los tres lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos L, M y N respectivamente, entonces:

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=-1,$$

e inversamente si L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, para los cuales se cumple la relación anterior, entonces los tres puntos son colineales.

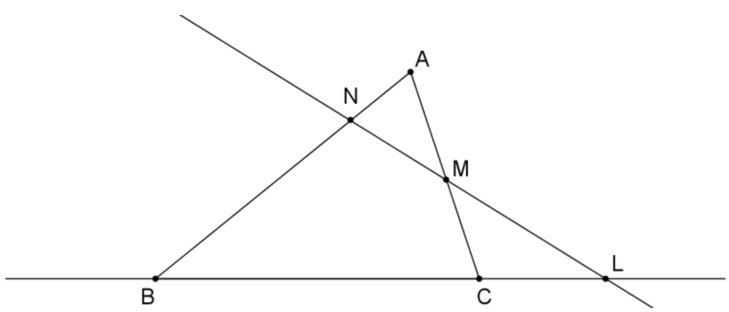


Figura 4.6

Demostración: Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares desde A, B y C a la recta determinada por L, M y N.

$\Delta\, ANP \sim \Delta\, BNQ,$

$\frac{AN}{NB} = \frac{PA}{BQ};$ *(1)*

$\Delta\, BLQ \sim \Delta\, CLR,$

$\frac{BL}{LC} = \frac{QB}{CR};$ *(2)*

$\Delta\, CMR \sim \Delta\, AMP,$

$\frac{CM}{MA} = \frac{RC}{AP};$ *(3)*

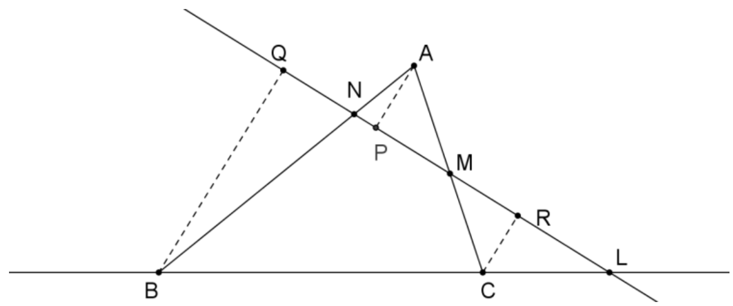


Figura 4.7

Multiplicando (1), (2) y (3), se obtiene:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{PA}{BQ} \cdot \frac{QB}{CR} \cdot \frac{RC}{AP} = -1,$$

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

El recíproco se demuestra en forma análoga al del inverso de Ceva.

Tanto el teorema de Ceva como el de Menelao tienen una forma trigonométrica.

Teorema 4.1.3 (Forma trigonométrica del teorema de Ceva) Si la hipótesis del teorema de Ceva se satisface, entonces:

$$\frac{sen\, ACN}{sen\, NCB} \cdot \frac{sen\, BAL}{sen\, LAC} \cdot \frac{sen\, CBM}{sen\, MBA} = 1;$$

e inversamente, si L, M y N son puntos respectivamente en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, para los cuales es válida la relación anterior, entonces AL, BM y CN son concurrentes.

Teorema 4.1.4 (Forma trigonométrica del teorema de Menelao) Si la hipótesis del teorema de Menelao se satisface, entonces:

$$\frac{sen\, ACN}{sen\, NCB} \cdot \frac{sen\, BAL}{sen\, LAC} \cdot \frac{sen\, CBM}{sen\, MBA} = -1;$$

e inversamente, si L, M y N son puntos respectivamente en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, para los cuales es válida la relación anterior, entonces L, M y N son colineales.

Estos dos teoremas se demuestran a partir de los teoremas de Ceva y Menelao, en sus formas no trigonométricas, utilizando el teorema de la bisectriz generalizada.

Teorema 4.1.5 (Teorema de la división interna y externa) Si P, L y M son puntos respectivamente en los lados AB, BC y CA del triángulo ABC, tales que AL, BM y CP son concurrentes y si la recta LM interseca AB en Q, entonces los puntos P y Q son conjugados armónicos con respecto al segmento AB.

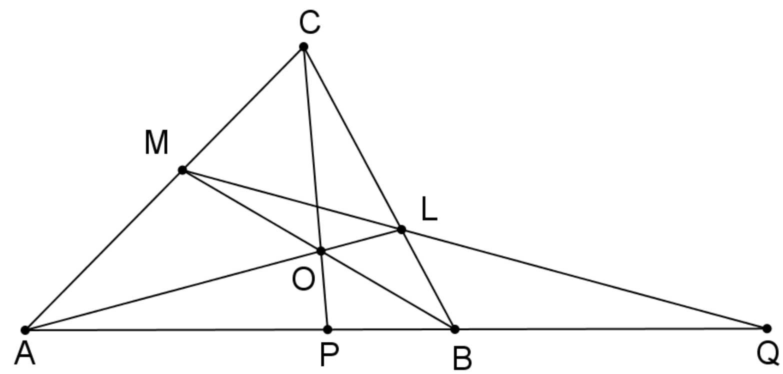


Figura 4.8

Demostración: Ya que *AL*, *BM* y *CP* son concurrentes, por el teorema de Ceva se tiene que,

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1.$$

Ya que *L*, *M* y *Q* son colineales, por el teorema de Menelao se tiene que,

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=-1.$$

Se tiene entonces que,

$$\frac{AP}{PB}=-\frac{AQ}{QB},$$

por lo que *P* y *Q* son conjugados armónicos respecto del segmento *AB*.

De este resultado se puede deducir que dado un segmento *AB* y un punto *P* se puede construir el construir el conjugado armónico de *P* con respecto de *AB.*

Se selecciona un punto cualquiera *C* que no esté en la recta *AB* y se trazan las rectas *CA, CB* y *CP*. Se traza una recta por *A* que no pase por *B* y sean *L* y *O* sus intersecciones con *BC* y *CP* respectivamente.

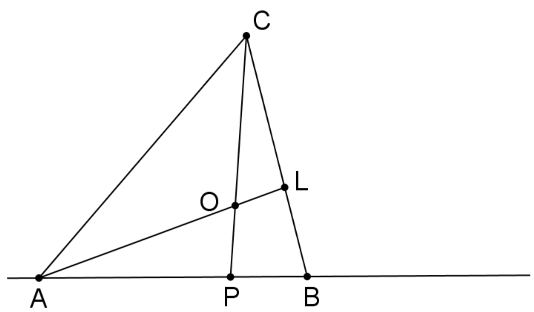


Figura 4.9

Sea *M* la intersección de *BO* con *AC*. Entonces *Q*, la intersección de *LM* con *AB* es el conjugado armónico de *P* con respecto a *AB*.

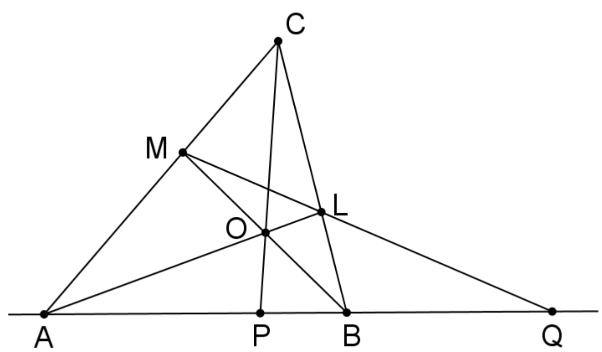


Figura 4.10

Cabe hacer notar que dado que el conjugado armónico de un punto dado *P*, con respecto a dos puntos fijos, *A* y *B*, es único, independientemente de la selección del punto *C* y de la de la recta por *A*, la recta *ML* corta *AB* en el punto *Q*.

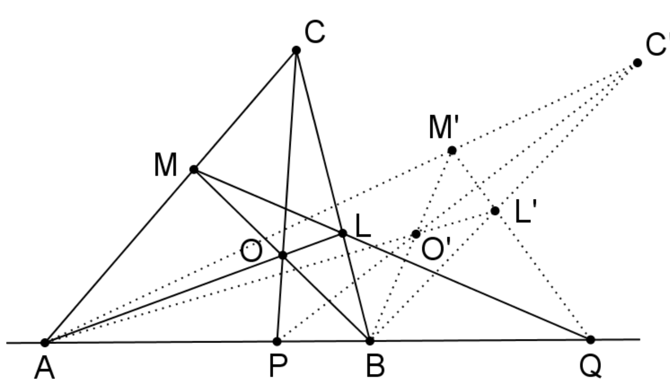


Figura 4.11

Actividad 41

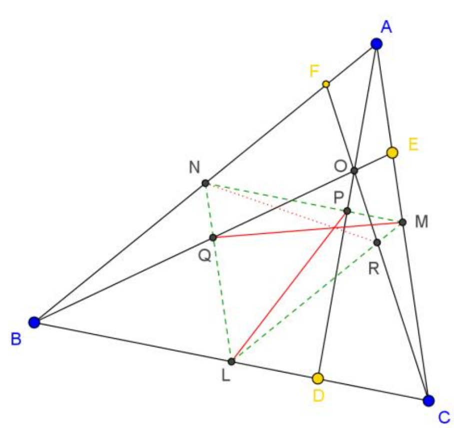
Demuestre:

1. Usando los resultados de esta sección que:
    a. Las medianas de un triángulo son concurrentes.
    b. Las seis bisectrices de los ángulos exteriores e interiores de un triángulo, pasan por tercias por cuatro puntos.
    c. Las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo cortan los lados opuestos en tres puntos colineales.
2. Si *P* y *Q* son puntos en *AB* y *AC* del triángulo *ABC* de tal forma que *PQ* es paralelo a *BC* y si *BQ* y *CP* se intersecan en *O*, entonces *AO* es una mediana.
3. En la figura del Teorema de Ceva, se tiene que:

$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1.$$

4. Si *P* es el punto medio del lado *BC* del triángulo *ABC*, *Q* y *R* son puntos cualesquiera en *AC* y *AB* de tal forma que *BQ* y *CR* se corten en *AP*, entonces *QR* es paralelo a *BC*.
5. Si la circunferencia inscrita del triángulo *ABC* es tangente a los lados *BC*, *CA* y *AB* en *P*, *Q* y *R* respectivamente, entonces las rectas *AP*, *BQ* y *CR* son concurrentes. El punto de concurrencia es llamado el punto de Gergonne del triángulo.
6. Sean *L*, *M* y *N* los puntos medios de los lados *BC*, *CA* y *AB* del triángulo *ABC*, respectivamente. Sean *D*, *E* y *F* tres puntos sobre estos lados tales que *AD*, *BE* y *CF* son concurrentes. Si *P*, *Q* y *R* son los puntos medios de *AD*, *BE* y *CF* respectivamente, demuestre que *PL*, *QM* y *RN* son concurrentes.

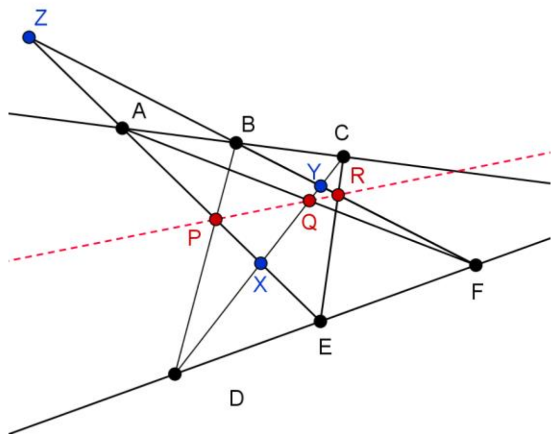
   Hint:



7. Si una circunferencia corta a los lados *BC*, *CA* y *AB* del triángulo *ABC* en los puntos *P*, *P*’; *Q*, *Q*’; *R*, *R*’, respectivamente, y si *AP*, *BQ* y *CR* son concurrentes, entonces *AP*’, *BQ*’ y *CR*’ son concurrentes.

8. Si *A*, *B*, *C*, son tres puntos colineales y *D*, *E*, *F* son otros tres puntos colineales, y si las intersecciones de las rectas *AE*, *Af*, *BF* con las rectas *DB*, *DC*, *EC*, son los puntos *P*, *Q* y *R*, respectivamente, entonces éstos son colineales. A esta propiedad se le llama el **teorema del hexágono de Pappus**.

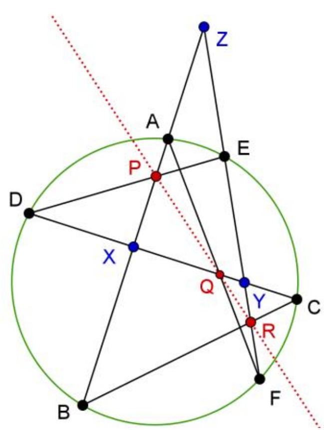
   Hint: Considera el triángulo *XYZ*.



9. Si *A*, *C*, *E* son tres puntos que están sobre una recta y *B*, *D*, *F* están sobre otra recta, y si las rectas *AB* y *CD* son paralelas a *DE* y *FA*, respectivamente, demuestre que *EF* es paralela a *BC*.

10. Los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una circunferencia son colineales. La recta que contiene estos puntos es llamada recta de Pascal del hexágono y este teorema es conocido como **teorema de Pascal**.

    Hint: Considera el triángulo *XYZ*.



Actividad 42

Realice las siguientes construcciones usando únicamente regla:

1. Dado un segmento de recta *AB* y su punto medio, trace una paralela a *AB* que pase por un punto dado *P*.
2. Dadas dos rectas paralelas y el segmento *AB* en una de ellas. Encuentre el punto medio de *AB*.
3. Dadas dos rectas paralelas y un punto *P* que no esté en ellas, trace una paralela a las dadas.
4. Dadas dos rectas paralelas y un segmento *AB* en una de ellas, triplicar el segmento *AB*.
5. Dadas dos rectas paralelas y un segmento *AB* en una de ellas, dividir en 3 el segmento *AB*.

4.2 Teoremas de Desargues

El Teorema de Desargues está íntimamente ligado con el estudio de la perspectiva. Se dice que dos figuras están en perspectiva si las rectas que unen puntos correspondientes de las dos figuras son concurrentes. A este punto de concurrencia se le llama el centro de perspectiva de las dos figuras.

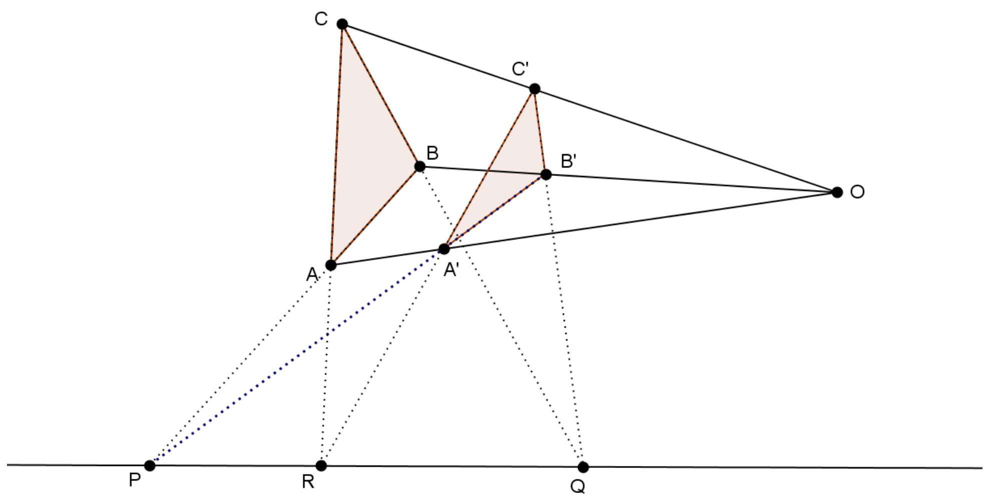
Desargues, (1591-1661), arquitecto e ingeniero militar de Lyon, por un tiempo integrante del grupo francés de matemáticos de esa época, entre los que se contaban Descartes y Fermat. En 1636 Desargues publicó un texto en el que presentaba un método geométrico para construir imágenes en perspectiva de los objetos. Su trabajo más importante, publicado en 1639, fue un tratado sobre el estudio de las cónicas a través de métodos proyectivos, es decir de sus invariantes bajo proyecciones (*Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan)*.

Desargues concebía la geometría proyectiva como una extensión natural de la geometría euclidiana en la que las rectas paralelas se cortaban en el infinito. En parte, por el rompimiento que significaba con la concepción de la época en la que no parecía posible que se pudiera decir algo sobre las cónicas que no fuera dicho más fácilmente a través del álgebra, y en parte por el rebuscado lenguaje que usó para escribir su tratado, sus planteamientos no fueron aceptados en la época y de permanecieron prácticamente olvidados por cerca de 200 años.

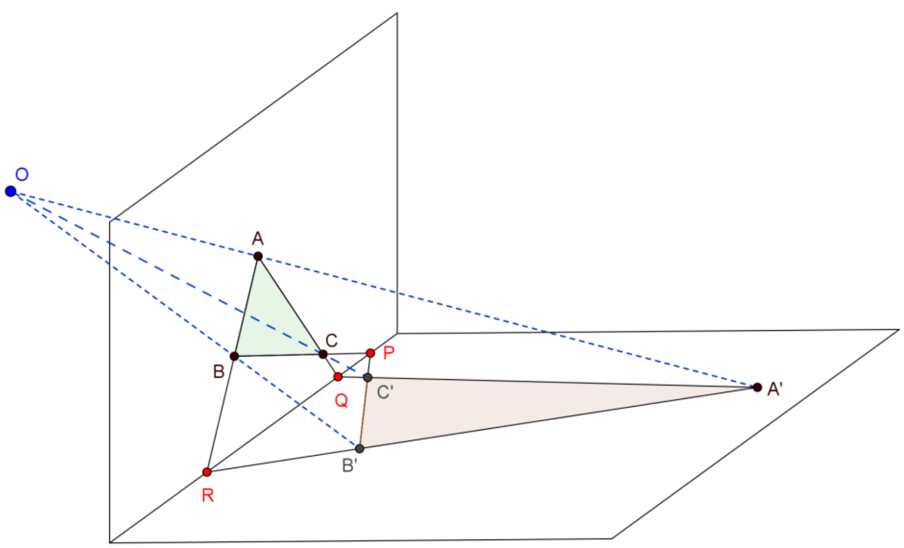
Aún ahora, Desargues no es conocido generalmente por su tratado sino por una proposición que no aparece en él, el llamado Teorema de Desargues.

A pesar de la sencillez de la figura, constituida sólo por puntos y rectas y que la demostración para triángulos que no están en el mismo plano depende únicamente de las relaciones de incidencia y es bastante sencilla, la demostración para triángulos que están en el mismo plano no lo es tanto. Por ello, aun cuando el teorema de Desargues es una propiedad netamente proyectiva su demostración se realizará aquí utilizando el teorema de Menelao.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Desargues) Si en un plano dos triángulos ABC y A'B'C' están en perspectiva desde un punto O, los lados correspondientes se cortan en tres puntos colineales P, Q y R.



El Teorema de Desargues en el plano



El Teorema de Desargues en el espacio

Figura 4.12

Sean *ABC* y *A′B′C′* dos triángulos en perspectiva con *O* como centro de perspectiva. Sean *P* la intersección de *AB* y *A′B′*, *Q* la de *BC* y *B′C′* y R la de *CA* y *C′A′*. Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo *ABO* con *B′A′P* como transversal se obtiene

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1.$$

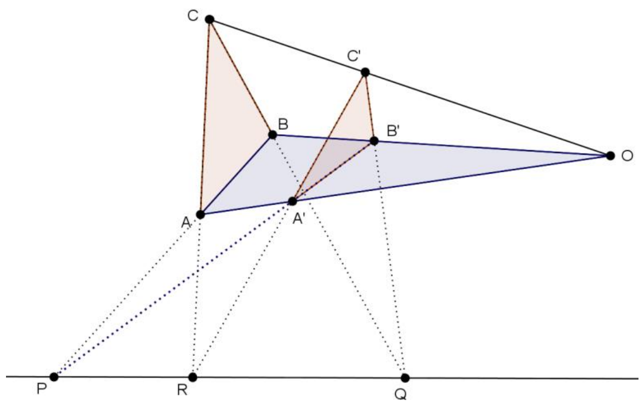


Figura 4.13

Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo *BCO* con *B′C′Q* como transversal se obtiene

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1.$$

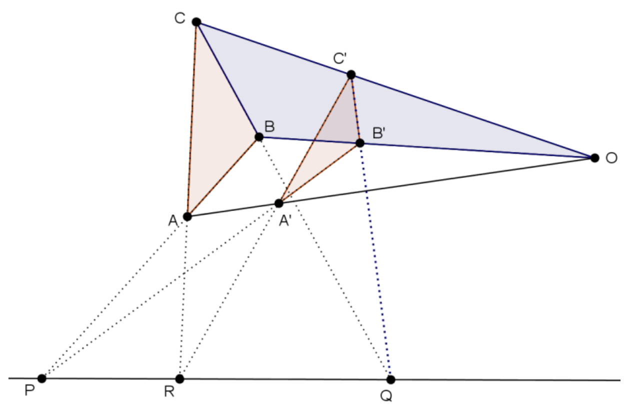


Figura 4.14

Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo *CAO* con *A′C′R* como transversal se obtiene

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1.$$

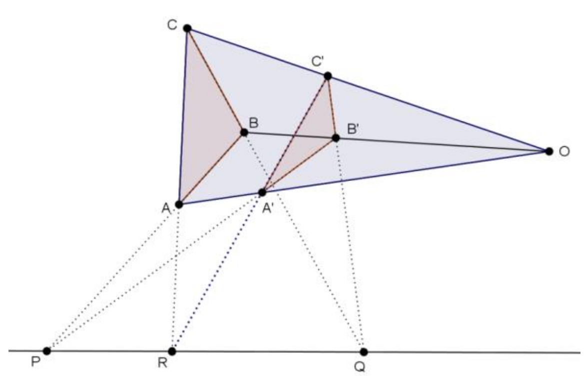


Figura 4.15

El producto de estas tres ecuaciones da como resultado:

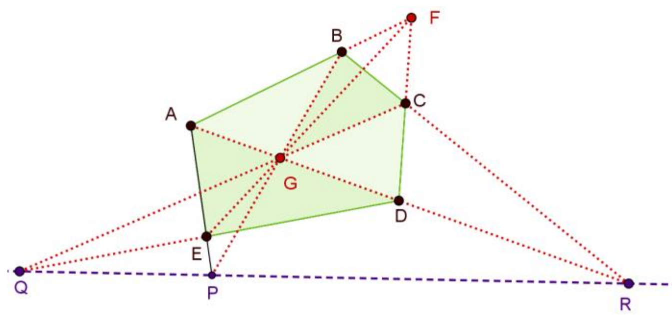
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1,$$

lo que demuestra que *P*, *Q* y *R* son colineales.

Actividad 43

1. Encuentre en la configuración de Desargues dos parejas de triángulos en perspectiva de tal forma que en un caso el centro de perspectiva sea alguno de los puntos *P*, *Q* y *R* de la figura 4.15 y en el otro caso sea alguno de los puntos *A, B, C, A′, B′, C′* de la misma figura. Diga en cada uno de los casos que recta es el eje de perspectiva.
2. Sean *ABCDE* un pentágono, *F* el punto de intersección de los dos lados no adyacentes *AB* y *CD*, *G* el punto de intersección de la diagonal *AD* con la recta *EF*, *P* el punto de intersección del lado *AE* con la recta *BG*, *Q* la intersección del lado *DE* con la recta *CG* y *R* la del lado *BC* con la diagonal *AD*. Demuestre que los puntos *P*, *Q* y *R* son colineales.

   Hint:



Teorema 4.2.2 (Recíproco del teorema de Desargues) Sean *ABC y A′B′C′* dos triángulos en el plano tales que las intersecciones de sus lados correspondientes P, Q y R son colineales, entonces los triángulos están en perspectiva.

Considérense los triángulos *AA′R* y *BB′Q,*

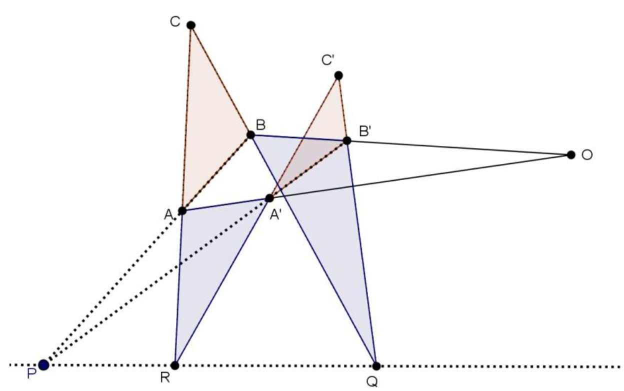


Figura 4.16

Estos triángulos están en perspectiva con *P* como centro de perspectiva y las intersecciones de sus lados correspondientes son O, C y C′, por tanto, estos puntos son colineales y los triángulos *ABC* y *A′B′C′* están en perspectiva con *O* como centro de perspectiva. A la recta en que están *P*, *Q* y *R* se le llama el eje de perspectiva.

Esta configuración está formada por 10 puntos y 10 rectas y tiene la característica de que cada recta tiene tres puntos de la configuración y por cada punto pasan tres rectas de la configuración; además, cada punto es centro de perspectiva de dos triángulos de la configuración y cada recta es eje de perspectiva de dos triángulos de la configuración.

Actividad 44

Demuestre que, si tres triángulos tienen un centro común de perspectiva, entonces sus ejes de perspectiva son concurrentes.

Actividad 45

1. Dadas dos rectas y un punto *P* que no se encuentra en ellas, con regla solamente trace la recta que pasa por *P* y el punto de intersección *A* de las rectas dadas, sin utilizar este punto *A*.
2. Construir un triángulo que esté en perspectiva con un triángulo dado y que sea semejante a otro triángulo dado.

4.3 Cuadrángulos y cuadriláteros completos

Hasta ahora se ha hablado de diferentes figuras geométricas sin hacer mayor reflexión sobre sus denominaciones. Entre estos casos destacan los triángulos y los cuadriláteros. Las denominaciones de estas figuras parten de raíces diferentes.

En el caso del *triángulo* su nombre describe a la figura a partir de la condición de que tiene tres ángulos (o sea tres vértices no colineales) y en consecuencia tiene tres lados, ya que tres puntos no colineales determinan tres rectas. Asimismo, los lados del triángulo se han considerado en ocasiones sólo como el segmento de que une dos vértices y en ocasiones como las rectas completas que unen los vértices.

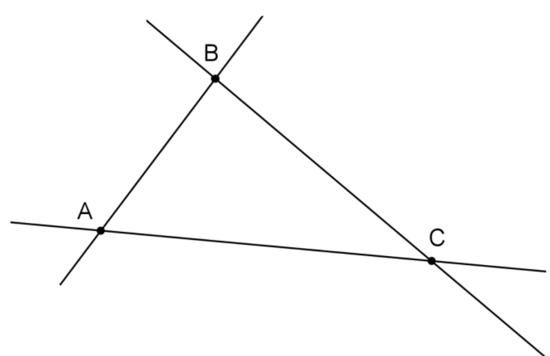


Figura 4.17

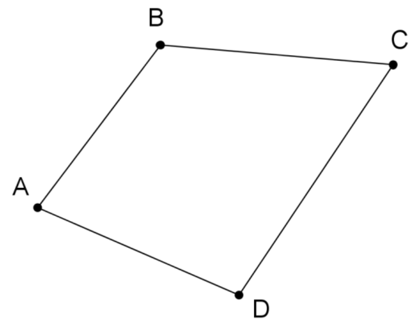


Figura 4.18

En el caso del cuadrilátero se ha considerado a la figura que tiene cuatro lados (o sea cuatro rectas no concurrentes por ternas) y cuatro vértices. Se observa que no se han considerado como vértices del cuadrilátero todos los puntos que son intersecciones de sus lados.

En forma análoga, se puede definir un trilátero como la figura formada por tres rectas, no concurrentes. Sus vértices se determinan por la intersección de estas tres rectas. De esta forma, un trilátero tiene tres vértices.

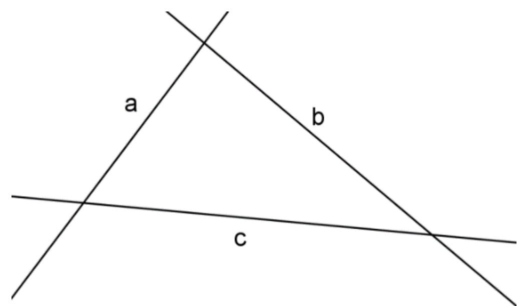


Figura 4.19

Lo anterior implica que un triángulo y un trilátero coinciden, tienen el mismo número de vértices y de lados.

Si se consideran, en forma análoga, un cuadrángulo, como la figura determinada por cuatro puntos no colineales por ternas y un cuadrilátero como la figura determinada por cuatro rectas, no concurrentes por ternas, se verá que estas dos figuras no tienen el mismo número de vértices, ni de lados.

Se seguirá llamando cuadrilátero a la figura que usualmente hemos denominado como tal y si se consideran como vértices a todos los puntos que son intersección de las rectas que lo definen, se le llamará cuadrilátero completo.

4.4 Cuadrángulo completo

Un cuadrángulo completo es una figura que consiste de cuatro puntos, ninguna terna colineal, y de las seis rectas determinadas por estos puntos. Los cuatro puntos son sus vértices y las seis rectas son sus lados. En la figura siguiente los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son sus vértices y las rectas *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD* y *CD* son sus lados.

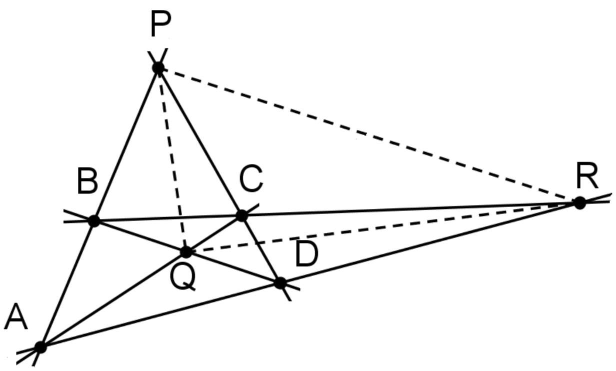


Figura 4.20

Se dice que dos lados son opuestos si no tienen ningún vértice en común. En un cuadrángulo completo hay tres pares de lados opuestos. En la figura los pares de lados *AB* y *CD*; *BC* y *AD*; *BD* y *AC* son opuestos. Los tres puntos determinados por los tres pares de lados opuestos se denominan como los puntos diagonales del cuadrángulo.

Los puntos *P*, *Q* y *R* de la figura son los puntos diagonales del cuadrángulo completo *A*, *B*, *C* y *D*. El triángulo determinado por estos tres puntos es el triángulo diagonal del cuadrángulo completo.

Teorema 4.4.1 Por cada punto diagonal de un cuadrángulo completo pasan cuatro rectas armónicas que son los dos lados que pasan por el punto y las rectas que lo unen con los otros dos puntos diagonales.

Demostración:

Sea *ABCD* un cuadrángulo completo y *P*, *Q* y *R* sus puntos diagonales. Se prolonga el lado del triángulo diagonal *PQ*, sea *T* el punto de intersección de este lado con el lado *AD* del cuadrángulo. Ya que *PT*, *AC* y *BD* son concurrentes en *Q* y *B*, *C* y *R* son colineales, se tiene que *T* y *R* son conjugados armónicos respecto de *A* y *D* (teorema 4.1.5) y entonces por el teorema 3.4.6, se tiene $P(AD, TR) = -1$.

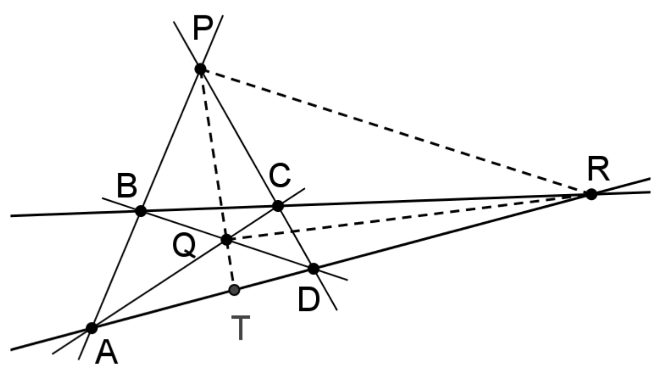


Figura 4.21

Las demostraciones para los haces con vértices en *R* y *Q* son análogas.

4.5 Cuadrilátero completo

Un cuadrilátero completo es una figura que consiste de cuatro rectas, ninguna terna concurrente, y de los seis puntos determinados por estas rectas. Las cuatro rectas son sus lados y los seis puntos son sus vértices. En la figura siguiente las rectas *a, b*, *c* y *d* son sus lados y los puntos $a \cap b$, $a \cap c$, $a \cap d$, $b \cap c$, $b \cap d$ y $c \cap d$ son sus vértices.

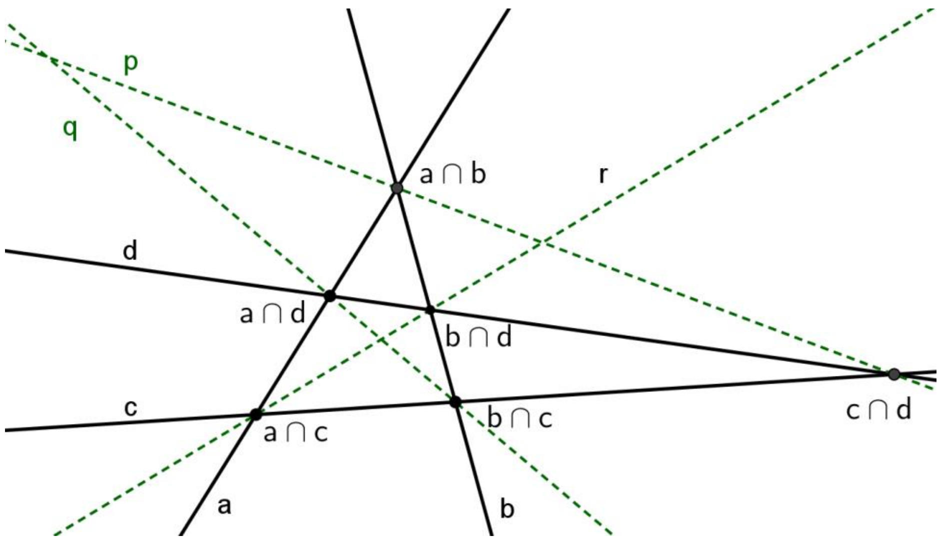


Figura 4.22

Se dice que dos vértices son opuestos si no están sobre el mismo lado. En un cuadrilátero completo hay tres pares de vértices opuestos. En la figura los pares de vértices $a \cap b$ y $c \cap d$; $b \cap c$ y $a \cap d$; $b \cap d$ y $a \cap c$ son puntos opuestos. Las tres rectas determinadas por los tres pares de vértices opuestos se denominan como las rectas diagonales del cuadrilátero. Las rectas *p*, *q* y *r* son las rectas diagonales del cuadrilátero completo *a*, *b*, *c* y *d*. El trilátero determinado por estos tres puntos es el trilátero diagonal del cuadrilátero completo. Observe que, ya que un trilátero es también un triángulo, se puede hablar del triángulo diagonal del cuadrilátero completo.

Teorema 4.5.1 En cada diagonal de un cuadrilátero completo hay una hilera armónica que consiste de los dos vértices en esa diagonal y los puntos en los cuales esta es intersecada por las otras dos diagonales

Demostración:

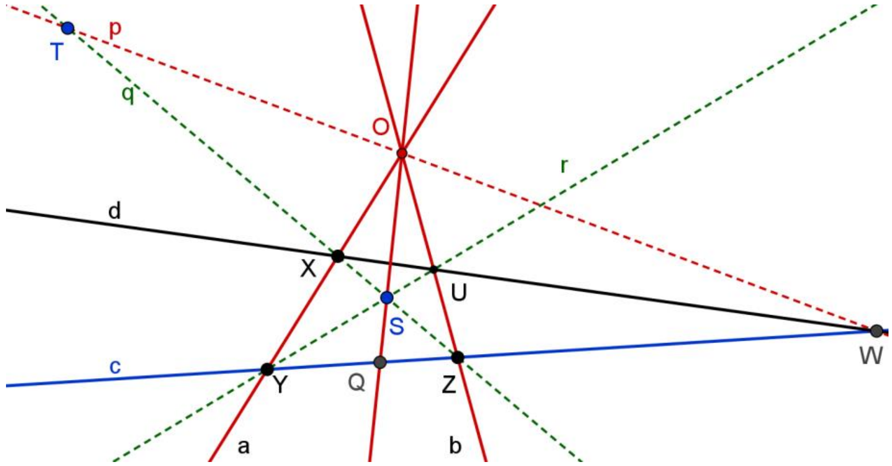


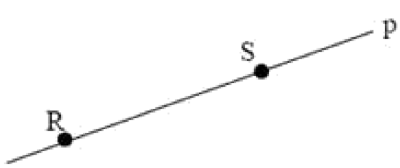
Figura 4.23

Sea el cuadrilátero de lados *a*, *b*, *c* y *d*. Sean *p*, *q* y *r* sus diagonales. Sean los puntos *T* = $p \cap q$, *S* = $q \cap r$. Sean $a \cap b = O$, $a \cap d = X$, $a \cap c = Y$, $b \cap c = Z$, $c \cap d = W$ y $b \cap d = U$. Se demostrará que (*TS*, XZ) = -1, esto es, que estos cuatro puntos son armónicos. Por construcción se tiene que *OQ*, *XZ* y *YU* son concurrentes y *X*, *U* y *W* colineales, por tanto, por el teorema 4.1.5 los puntos *Q* y *W* son conjugados armónicos respecto de *Y* y *Z*. Por el teorema 3.4.6, se tiene *O*(*YZ*, *QW*) = -1 y ya que la recta *q* corta al haz en *T*, *S*, *X* y *Z*, se tiene que también (*TS*, XZ) = -1, como se quería demostrar. La demostración para las otras diagonales es análoga.

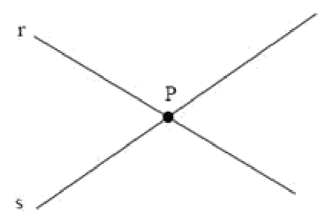
4.6 Dualidad

Uno de los conceptos importantes en Geometría Proyectiva es el conocido como principio de dualidad.

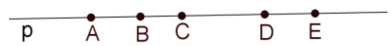
El principio de dualidad afirma que, a partir de cualquier teorema o construcción, de naturaleza proyectiva, podemos obtener otro, llamado dual, al intercambiar las palabras punto y recta y colineal por concurrente y si un teorema o propiedad es verdadera, entonces el dual también lo es.



Dos puntos R y S determinan una única recta p

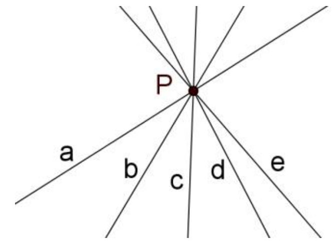


Dos rectas *r* y *s* determinan un único punto *P*



Una hilera de puntos consiste en un conjunto de puntos colineales, *A, B, C, D, E,* por ejemplo.

Tres puntos en el plano son colineales o determinan un triángulo

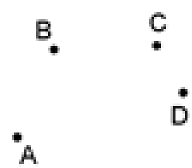


Un haz de rectas consiste en un conjuntos de rectas que pasan por el mismo punto, *a, b, c, d, e*, por ejemplo

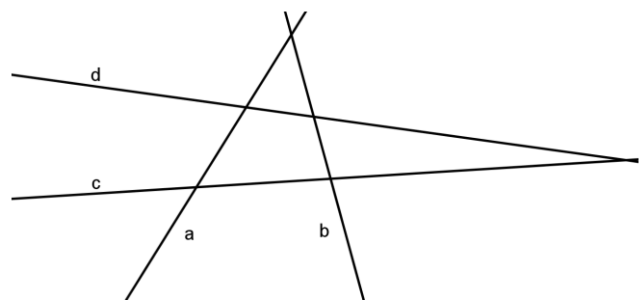
Tres rectas en el plano son concurrentes o determinan un trilátero (triángulo)

De acuerdo con el resultado que se vio en la sección 4.3, el dual de un triángulo es un trilátero, pero un trilátero es un triángulo, por lo que se dice que el triángulo es su propio dual.

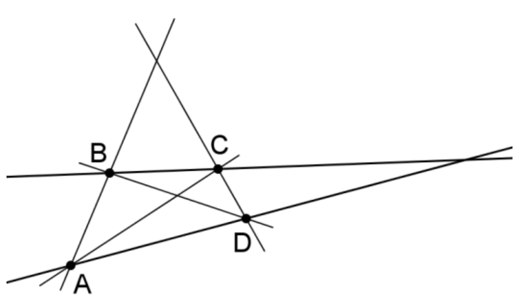
El dual de un cuadrángulo completo es un cuadrilátero completo:



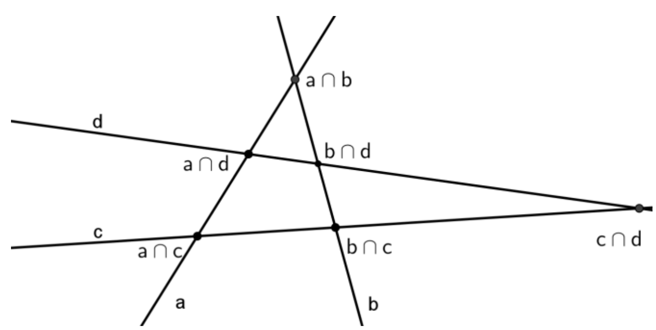
Un cuadrángulo completo está definido por 4 puntos no colineales por tercias: *A*, *B*, *C* y *D*, llamados vértices del cuadrángulo.



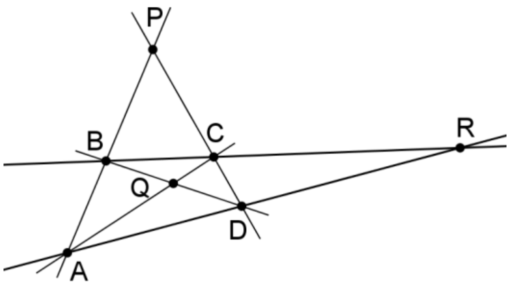
Un cuadrilátero completo está definido por 4 rectas no concurrentes por tercias: *a*, *b*, *c*, *d* llamados lados del cuadrilátero.



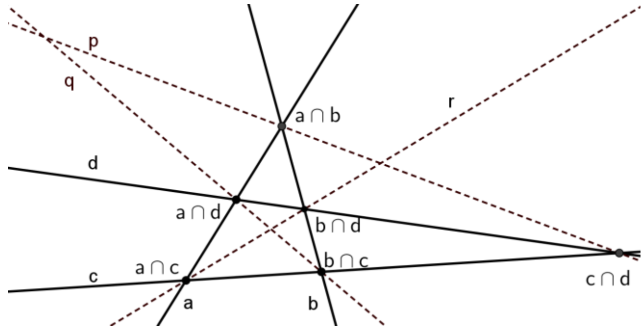
Los lados de un cuadrángulo completo son las seis rectas que unen sus vértices.



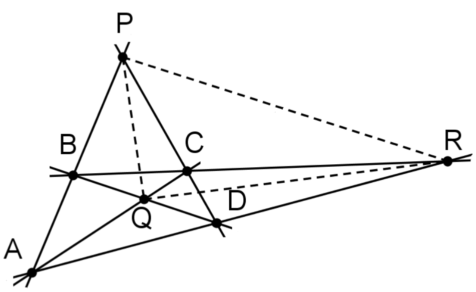
Los vértices de un cuadrilátero completo son los seis puntos de intersección de sus lados.



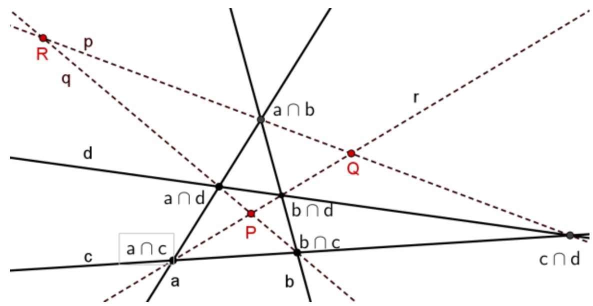
Dos lados de un cuadrángulo son opuestos si no tienen vértices en común. Los puntos diagonales son las intersecciones de lados opuestos, *P*, *Q* y *R* en la figura.



Dos vértices de un cuadrilátero son opuestos si no están sobre el mismo lado. Las rectas diagonales son las que unen vértices opuestos, *p*, *q* y *r* en la figura.



El triángulo diagonal del cuadrángulo es el que tiene a los puntos diagonales como vértices, *P*, *Q* y *R* en la figura.



El trilátero diagonal del cuadrilátero es el que tiene a las rectas diagonales como lados. Ya que el dual de un trilátero es un triángulo, también se habla del triángulo diagonal de un cuadrilátero completo, *P*, *Q* y *R* en la figura.

Tarea Examen

1) Construya un cuadrilátero completo para cada uno de los siguientes casos:
   a. Tal que uno y sólo uno de sus vértices sea un punto al infinito.
   b. Dos de sus vértices sean puntos al infinito.
   c. Tal que uno y sólo uno de los vértices de su triángulo diagonal sea un punto al infinito.
   d. Dos de los vértices de su triángulo diagonal sean puntos al infinito.
2) Muestra que los teoremas 4.4.1 y 4.5.1 son teoremas duales.
3) Los vértices de un cuadrángulo completo son los tres vértices de un triángulo y el punto de intersección de sus medianas. Construya su

triángulo diagonal. Construya un cuadrilátero completo que tenga el mismo triángulo diagonal.

4) Construya un cuadrilátero completo que tenga un triángulo diagonal dado. ¿Es única la solución?

5) Enuncie el dual del teorema de Desargues.

6) Demuestre que cada uno de los triángulos cuyos lados son tres de los cuatro lados de un cuadrilátero completo, están en perspectiva con el triángulo diagonal del cuadrilátero.

7) Encuentre un cuadrángulo completo que tenga el mismo triángulo diagonal que un cuadrilátero completo dado.