Ma. Guadalupe Lucio Gómez Maqueo
Facultad de Ciencias, UNAM

Geometría Moderna I

Estas notas se desarrollaron para cubrir los temas del programa de Geometría Moderna I que se imparte en la Facultad de Ciencias. Aun cuando en ellas se incluye todo el material del curso, se incorporan también algunos videos de elaboración propia y referencias a otros videos, así como archivos de extensión gif y ggb que las complementan y pueden propiciar un mejor entendimiento de los diferentes temas. En el cuerpo de las notas se indica en qué momento se propone observar los videos y trabajar con los diferentes archivos para reforzar los temas.

Para abrir los archivos de extensión ggb se requiere contar con el programa Geogebra que es de distribución gratuita y se puede bajar en la siguiente liga:

https://www.geogebra.org/

Asimismo, se presentan una serie de actividades para ir realizando a lo largo del curso. Se propone que algunas de ellas se realicen con el mismo programa de Geogebra, aunque la mayoría son demostraciones de diferentes propiedades geométricas, ya que uno de los objetivos fundamentales del curso es inducir al estudiante a la comprensión y utilización del método deductivo. Se considera importante que se realicen las diferentes actividades propuestas, ya que muchos de los resultados que se incluyen en estas actividades se utilizan en momentos posteriores.

UNIDAD UNO

Geometría del triángulo

1. Geometría del triángulo

1.1. Introducción

1.1.1. La Geometría Prehelénica

(Video 1[1]: http://www.dailymotion.com/video/xnv8uo_historia-de-las-matematicas-1-de-4-el-idioma-del-universo_tech?GK_FACEBOOK_OG_HTML5=1).

Se ha dicho que el desarrollo de la ciencia es una sucesión de preguntas y problemas y de las propuestas de respuesta o solución a los mismos. Las preguntas y problemas cambian a través de la historia y las respuestas o soluciones que se formulan evolucionan de acuerdo con el conocimiento disponible en ese momento.

A nuestro alrededor, la naturaleza toma una infinidad de formas. La capacidad del ser humano para descubrirlas, para abstraerlas y para buscar soluciones a diversos problemas sobre las formas, es lo que impulsó el desarrollo de la geometría. Por ello, para el estudio de la ciencia, y en nuestro caso de la geometría, hacer algunas referencias sobre su desarrollo histórico parece obligado.

Ilustración 1.1

---

[1] Du Sautoy, Marcus, 2008. *Historia de las Matemáticas, Capítulo I: El Lenguaje del Universo*, Gran Bretaña, BBC en http://www.dailymotion.com/video/xnv8uo_historia-de-las-matematicas-1-de-4-el-idioma-del-universo_tech?GK_FACEBOOK_OG_HTML5=1.

La vieja definición de las matemáticas como la “ciencia del número y la magnitud”, no corresponde ya con su carácter y desarrollo actual, pero nos permite ver cuáles fueron sus inicios. La geometría, de acuerdo con el origen mismo de su nombre, surge para resolver una serie de problemas prácticos, y en su forma más elemental se ocupa de problemas métricos como el cálculo del área y perímetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos.

En esta sección no se pretende dar un panorama completo de la historia de la geometría, sino dar una mirada a la naturaleza de los antecedentes de la geometría prehelénica, por lo que se referirán solamente a dos de los más importantes hogares culturales de la antigüedad: Mesopotamia y el Valle del Nilo. En ellos se desarrollaron las civilizaciones babilónica y egipcia las cuales, contaban ya con una forma de escritura alrededor del año 3000 a. n. e.

El historiador griego Herodoto (Gaos, 2002), registra la utilización de la agrimensura desde la época de los egipcios, para lo que seguramente utilizaban los conocimientos adquiridos empíricamente sobre las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos. Los registros más importantes con los que se cuenta de la civilización egipcia son el papiro de Rhind o de Ahmes y el de Moscú, los dos en escritura hierática y con dimensiones aproximadas de seis metros de largo los dos, por treinta centímetros de ancho el primero y de 7 el segundo.

El papiro de Rhind fue escrito aproximadamente en 1650 a. n. e., a partir de escritos de 200 años de antigüedad, según afirma el escriba Ahmes al principio del texto, aunque resulta imposible saber qué partes del papiro corresponden a estos textos anteriores (Maza, 2000). Es una colección de ejercicios matemáticos y ejemplos prácticos. Contiene 85 problemas.

Muestra el uso de fracciones, resolución de problemas similares a los resueltos posteriormente a través de ecuaciones lineales y cuadráticas, la medición de áreas de triángulos, trapezoides y rectángulos, el cálculo de volúmenes de cilindros y prismas, y por supuesto de la superficie del círculo.

El problema 51 muestra que el área de un triángulo isósceles se encontraba tomando la mitad de la base y se multiplica por su altura. Ahmes sugiere que el triángulo isósceles se puede ver como dos triángulos rectángulos, de tal forma que moviendo uno de ellos de posición, se forme un rectángulo.

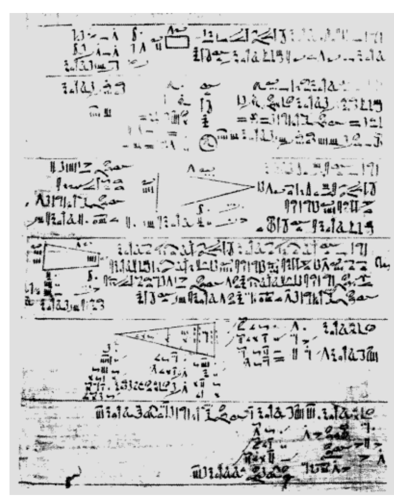


Ilustración 1.2
Imagen de
http://www.physics.utoledo.edu/~ljc/rhind.html

En el caso del papiro de Moscú, también conocido como de Golenishchev, no se conoce registro sobre su autor y su antigüedad, se ubica por el año 1890 a. n. e. Tiene una colección de veinticinco problemas resueltos, sobre cuestiones cotidianas, no muy diferentes de los del papiro de Rhind.

De los 110 problemas que contienen estos dos registros, 26 son de carácter geométrico. El conocimiento que se obtiene a través de estos registros indica que los resultados consignados son de naturaleza empírica y que la realización de cálculos era su principal finalidad. Se considera que en los casos en que aparentemente surgen algunos elementos teóricos, como en el caso del problema 51 del papiro de Rhind, su finalidad era facilitar la técnica de cálculo más que establecer alguna regla general.

Del problema 14 del papiro de Moscú se afirma que es uno de los logros más impresionantes de las matemáticas egipcias. Está relacionado con la figura que se ve en el fragmento del papiro que se presenta en la Ilustración 1.3. La base es un cuadrado que mide 4 codos[2] por lado, la tapa es un cuadrado cuyos lados miden 2 codos y la altura de la pirámide truncada es de 6 codos. Se requiere "calcular la pirámide", es decir "calcular el volumen de la pirámide".

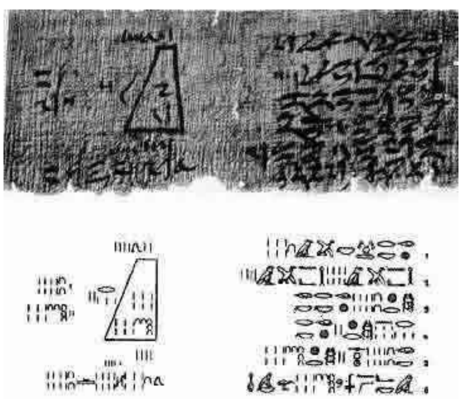


Ilustración 1.3

Imagen de: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/HistoriaImagen/Egipto.asp

El cálculo inicia determinando el área de la base: 4×4 = 16.

Se encuentra el área de la tapa: 2×2 = 4.

Después se computa el producto del lado de la base por el lado de la tapa: 4×2 = 8.

Estos números se suman y se obtiene 28. Ahora se toma un tercio de la altura, es decir, 2.

Finalmente se toman el producto de un tercio de la altura y 28 y el escriba anota:

Miren que da 56.

De la civilización babilónica se conservan un amplio número de tabletas de barro en escritura cuneiforme, algunos autores mencionan hasta 500,000. Por supuesto que no todas se refieren a las matemáticas.

Su sistema numérico era bastante avanzado, posicional de base 60 en lugar del sistema de base 10 que es el usado en la actualidad. Tal y como en la actualidad dividieron el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60

[2] La principal unidad de medida de los antiguos egipcios era el codo, equivalente a 52.3cm

segundos. Escribir 3h 15' 20', es decir, 3 horas, 15 minutos, 20 segundos, es equivalente a escribir la fracción sexagesimal 3 $^{15}/_{60}$ $^{20}/_{3600}$. La notación adoptada para este número sexagesimal fue 3;15,20.

El aspecto más sorprendente de la avanzada habilidad de cálculo babilónica es tal vez la construcción de tablas numéricas.

Una de las tabletas, la YBC 7,289 de la colección babilónica de la Universidad de Yale, muestra la comprensión del teorema de Pitágoras.

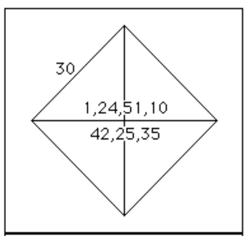


Diagrama de la tableta de Yale

Tiene sobre ella un diagrama de un cuadrado con 30 en un lado; dentro y cerca del centro de las diagonales está escrito 1,24,51,10 y 42,25,35. Los números corresponden al sistema babilónico en base 60.

Suponiendo que el primer número es 1;24,51,10 y convirtiéndolo al sistema decimal se tiene 1.414212963, mientras que $\sqrt{2}$ = 1.414213562.

Calculando: 30 × [1;24,51,10] se obtiene 42;25,35 que es el segundo número.

La diagonal de un cuadrado de lado 30 se encuentra multiplicando 30 por la aproximación a $\sqrt{2}$.

Al respecto de la naturaleza y trascendencia de las matemáticas prehelénicas, *Howard Eves* anota (Eves, 1969):

> "El razonamiento empírico puede describirse como la formulación de las conclusiones que se basan en la experiencia y en la observación; no está contenido ningún entendimiento real, y el elemento lógico no aparece. El razonamiento empírico contiene a menudo manipulaciones pesadas con casos especiales, observación de coincidencias y el empleo frecuente de la analogía, la experiencia a una buena suposición, la experimentación considerable y los destellos de intuición.
>
> A pesar de la naturaleza empírica de la matemática prehelénica, con su desprecio completo de la demostración y la aparentemente pequeña atención que se pone entre la verdad exacta y aproximada, uno, sin embargo, se asombra de la extensión y la diversidad de los problemas que atacaron con éxito. Evidentemente, gran parte de la verdad matemática elemental puede descubrirse por métodos empíricos cuando se complementa con experimentación extensa efectuada pacientemente durante largos periodos".

La geometría prehelénica pasa a Occidente a través de Grecia y es ahí donde adquiere el carácter deductivo; trasciende la práctica meramente empírica e inductiva de las civilizaciones egipcia y babilónica y da el gran salto cualitativo hacia una ciencia analítica y deductiva, es decir, se funda propiamente la Matemática como ciencia.

Como se ha dicho con anterioridad, las preguntas que se ha hecho el ser humano han ido cambiando a lo largo de la historia y las respuestas se han ido dando con base en el conocimiento acumulado; en el caso de los griegos, las preguntas se fueron transformando y ya no estuvieron referidas solamente a objetos concretos sino también geométricos. Los tres famosos problemas griegos: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo son ejemplo del tipo de problemas que atendía la geometría griega.

1.1.2 *La Geometría Griega*

Como ya se ha dicho el carácter de la geometría griega trasciende la práctica empírica de las civilizaciones babilónica y egipcia; de hecho, algunos autores consideran que no ha habido mayor contraste en las matemáticas que el paso de estas civilizaciones a los griegos, y puede uno preguntarse cómo explicar la divergencia entre la práctica antigua que no hacía diferencia entre la verdad exacta o aproximada, en la que las demostraciones eran inexistentes, y la geometría griega en la que se desarrolla un método lógico para demostrar las *verdades* geométricas. ¿Por qué no se desarrolló la geometría como una ciencia experimental?

Este hecho no se puede entender sin revisar algunos aspectos de la geometría griega, sin llegar a hacer un estudio detallado de la misma, lo cual llevaría mucho tiempo, además de que su estudio va más allá de los objetivos de este curso.

Las fuentes de las que procede el conocimiento de la geometría griega anterior a la obra de Ptolomeo son menos directas y fiables que las que se tienen de la matemática egipcia y babilónica, ya que no se ha contado, en general, con manuscritos originales de los matemáticos griegos de la época antigua. (Neugebauer, 1957)

Una de las fuentes importantes para conocer la geometría griega es el *Comentario* sobre el libro I de Euclides de *Proclo* (siglo V), (Heath, 1956). Este comentario incluye el llamado *Sumario de Eudemo,* un breve resumen de la geometría griega desde su inicio hasta Euclides, basado en la historia de la geometría de Eudemo de Rodas (320 a. n. e.), aun cuando no existe certeza sobre si Proclo tuvo acceso a este texto o a algún resumen elaborado posteriormente. Asimismo, se presume que Proclo tuvo acceso también a los *Comentarios sobre los Elementos* de Herón y al comentario de Ptolomeo sobre el V postulado de Euclides; a los trabajos geométricos de Apolonio y de los pitagóricos y por supuesto a los trabajos de Platón.

Uno de los sabios mencionados en el Sumario es *Tales de Mileto*, quien fuera uno de los "siete hombres sabios de Grecia", el cual se calcula que vivió aproximadamente entre los años 624 a 548 a. n. e. Este cálculo se ha realizado a partir de la fecha de un eclipse de sol que se produjo en el año 585 a. n. e., que algunas fuentes refieren que Tales pronosticó.

Proclo afirma que Tales estableció los teoremas siguientes:

1) *El círculo se biseca por su diámetro.*
2) *Los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales.*
3) *Los ángulos opuestos de líneas rectas que se intersecan, son iguales.*
4) *Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los triángulos son iguales.*
5) *El ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto*.
6) *El llamado Teorema de Tales hasta nuestros días.*

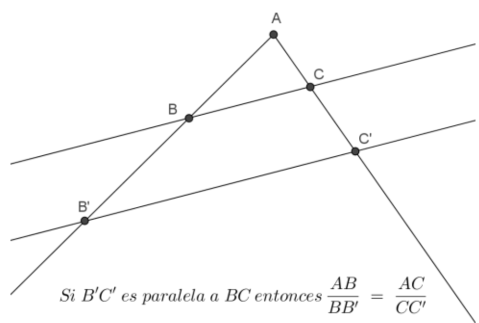


Figura 1.1

Algunos de estos resultados eran conocidos desde bastante tiempo antes, lo importante es la creencia de que Tales usaba razonamiento lógico para hacer ver que eran ciertos y no lo hacía por medio de la intuición, la experimentación y la comprobación repetida, como en épocas anteriores se había hecho.

El penúltimo resultado era ciertamente conocido por los babilonios aproximadamente en el 2600 a. n. e. Entre los resultados también atribuidos a Tales están el cálculo de la altura de las pirámides de Egipto, observando la longitud de sus sombras en el momento en que la longitud de la sombra de un gnomon era igual a su longitud[3], y el cálculo de la distancia de un barco a la playa a través de la proporcionalidad.

Independientemente de que algunos de los resultados atribuidos a Tales eran conocidos con anterioridad y de que no se cuenta con evidencia alguna de sus razonamientos demostrativos, es claro que es él la primera persona a quien se

[3] El gnomon hacía referencia a un objeto alargado que arroja sombra, usualmente la sombra se proyectaba sobre una escala para medir el tiempo.

atribuyen descubrimientos geométricos específicos y se estima razonable concluir que Tales contribuyó para el avance en la dirección de la estructuración deductiva de la geometría.

Otro matemático célebre que es mencionado en el Sumario es *Pitágoras*, de quien se afirma continuó el camino de Tales en relación con el desarrollo sistemático de la geometría.

El nacimiento de Pitágoras se sitúa entre el 580 y 568 a. n. e. La escuela de los Pitagóricos, situada en Crotona, en las costas de Italia conocida en esa época como Grecia Magna, se extiende aproximadamente por dos siglos a partir del año del año 540 a. n. e. En ella se estudiaba filosofía y matemáticas. De hecho, los nombres de Filosofía y Matemáticas se atribuyen a Pitágoras.

Se sabe poco de la vida personal de Pitágoras y de sus seguidores y no se puede tener certeza sobre cuales resultados hay que atribuirle a él personalmente y cuáles a sus discípulos.

Pitágoras era fundamentalmente un filósofo y reformador; las matemáticas constituían la base de su sistema filosófico y místico. Sus trabajos matemáticos estaban orientados a ofrecer un fundamento para su sistema filosófico que era la base de su enseñanza. Los Pitagóricos agrupaban los objetos matemáticos en cuatro cuerpos (quadrivium): números absolutos o aritmética, números aplicados o música, magnitudes en reposo o geometría y magnitudes en movimiento o astronomía.

Entre el conocimiento geométrico que se atribuye a los Pitagóricos está: el desarrollo de una teoría de las proporciones bastante completa, aunque limitada a segmentos conmensurables; la utilización de las propiedades de las paralelas para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos y algunas propiedades de polígonos y poliedros. Entre estas últimas cabe destacar el célebre teorema llamado de Pitágoras, que expresa la conocida relación entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo. Asimismo, se afirma que los Pitagóricos mostraron que el plano podía cubrirse con triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares.

Proclo en su Comentario al Libro1, indica que los Pitagóricos dieron el gran paso de sustentar su geometría sobre sus propios principios fundamentales y de liberarla de contenido concreto.

Sin embargo, tampoco existe registro alguno sobre la existencia de las demostraciones realizadas por los Pitagóricos. En el caso particular del teorema de Pitágoras, es relativamente fácil demostrar este teorema utilizando resultados sobre triángulos semejantes, pero los Pitagóricos no tenían una teoría completa de la semejanza. La demostración que Euclides aporta en la proposición 47 del libro I de los *Elementos* no utiliza la teoría de figuras semejantes, y se trata de una demostración que Proclo atribuye a Euclides mismo.

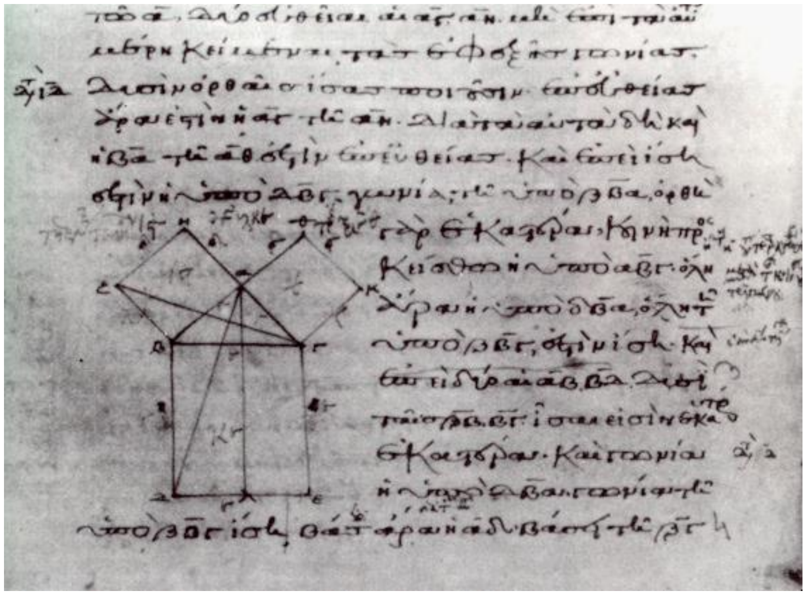


Ilustración 1.4
Elementos de Euclides. Proposición 47. Manuscrito griego del Siglo XII
http://almez.pntic.mec.es/~agos0000/Elementos.html

La conclusión que se considera más aceptable acerca de la existencia de demostraciones en la geometría pitagórica es que en un inicio justificaban sus resultados sobre la base de casos especiales, análogamente a como lo hacían en aritmética. Sin embargo, se presume que en la época de los últimos pitagóricos, es decir, hacia el 400 a. n. e., pudieron haber dado ya demostraciones más rigurosas.

La contribución esencial de los griegos a la matemática fue el concepto de que los resultados matemáticos deberían ser establecidos deductivamente a partir de un sistema explícito de axiomas.

El texto más antiguo que nos ha llegado en el que se desarrolla el método axiomático deductivo es la obra de los *Elementos* de Euclides. No se tiene mucha información acerca de la vida de Euclides, aun cuando se supone que vivió en Alejandría alrededor del año 300 a. n. e., de acuerdo con el citado Comentario de Proclo al Libro I de los Elementos. **(Video 2)[4].**

Proclo señala que los elementos de cualquier estudio deductivo deben considerarse los teoremas fundamentales o clave, los que son de uso amplio y general sobre el objeto que se está estudiando, e iniciando con estos elementos, será posible adquirir conocimiento de las otras partes de esta ciencia, mientras

[4] Khan, Sal. *Euclides como el padre de la Geometría*. Khan Academy, Creative Common attribution, subtitulado en español, en https://www.youtube.com/watch?v=WqzK3UAXaHs.

que sin ellos será imposible comprender un objeto tan complejo. Asimismo, de acuerdo con el mismo Proclo, fue *Hipócrates de Chíos* quien realizó el primer esfuerzo en este sentido; afirma que Euclides introdujo en sus *Elementos* muchos de los teoremas de Eudoxio, perfeccionó teoremas de otros antecesores y proporcionó demostraciones irrefutables de muchos resultados insuficientemente demostrados por ellos.

"A Euclides se debe la elección del sistema de axiomas, el orden de los teoremas y el rigor y tersura de las demostraciones, muchas de ellas suyas, sin duda". (Kline, 1972).

Independientemente de cuánto haya de original en sus Elementos y cuánto pueda haber recogido de textos anteriores, el mérito de Euclides es indiscutible. Cabe mencionar que la obra de Euclides ha sido modelo del estudio de la geometría elemental durante más de veinte siglos.

(Video 3)[5] https://www.youtube.com/watch?v=ugdP_VQdmrA.

Retomando la pregunta realizada a principio de esta sección, solamente nos resta mencionar que, como ya hemos visto, la transformación del carácter de la geometría fue un proceso paulatino. Diversos autores del tema consideran además que esta transformación estuvo indiscutiblemente entrelazada con la transformación de la sociedad, de sus estructuras, de la cultura y sobre todo de la filosofía de esa época. Los Pitagóricos y Platón, ocupan un lugar especial en esta transformación.

Platón filósofo griego, alumno de Sócrates. Se estima nació entre los años 428 y 427 a. n. e., fundador de la *Academia de Atenas*, donde fue maestro de Aristóteles. La contraposición entre la realidad y el conocimiento es descrita en su obra *La República*, que plantea de manera general la filosofía de un estado ideal, incluye pasajes en los que establece que la matemática (y todo razonamiento lógico) necesita apoyarse en presupuestos previos y en lo que llama el conocimiento *discursivo descendente,* de lo que *se presupone a lo que se deduce*, en el que el pensamiento prescinde de cualquier apoyo sensible, de cualquier referencia a algo material. Se considera que las ideas filosóficas de Platón cimentaron el camino de Euclides para la realización de su obra los Elementos.

1.1.3 Las construcciones y los postulados de Euclides

Al hacer una revisión de algunas de las propiedades elementales del triángulo se realizarán algunas construcciones geométricas. El problema de construir figuras geométricas es uno de los más antiguos de la geometría y se convirtió en una rama importante de la geometría elemental.

[5] *Los Elementos de Euclides* en https://www.youtube.com/watch?v=ugdP_VQdmrA.

¿Qué quiere decir realizar una construcción geométrica?

El problema de realizar una construcción geométrica no se refiere a encontrar una solución más o menos aproximada para fines prácticos o sobre algún caso particular, sino establecer un procedimiento general, del que podamos además comprobar su veracidad a partir de propiedades ya demostradas, a través del método deductivo.

Llevar a cabo o realizar una construcción geométrica significa entonces que, a partir de elementos dados o ya construidos (puntos, rectas, triángulos, segmentos, círculos, etc.) se derivan otros elementos un número finito de veces, haciendo uso de herramientas predeterminadas (regla, compás, escuadras, transportador, etc.). Se tiene además que definir claramente cuál es el uso permitido para las herramientas que se utilizan, suponiendo que los instrumentos tienen precisión ideal.

Pudiera sorprender que cuando se pide que se haga una construcción las herramientas permitidas se limiten en general al uso de la regla y el compás, e incluso en el caso de la regla no se permite su uso para medir, sino solamente para trazar rectas, lo que expresamos refiriéndonos a ella como regla no graduada. Esta restricción podríamos decir que es una "tradición" geométrica que se piensa fue establecida inicialmente por Platón y que se refleja de manera fundamental en la obra de Euclides.

¿Cómo podemos usar los instrumentos: regla y compás?

Las reglas de construcción están establecidas en los tres primeros postulados de Euclides (Kline, 1972):

> *Postulado 1* (Es posible) trazar una recta desde cualquier punto a cualquier otro.
>
> *Postulado 2* (Es posible) prolongar continuamente en línea recta una recta dada.

Los dos primeros postulados indican que se puede utilizar la regla para trazar el segmento determinado por dos puntos y para prolongar cualquier segmento indefinidamente, de modo que solamente se permite hacer uso de una regla no graduada.

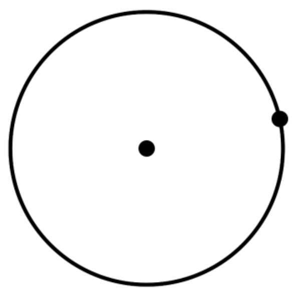
Figura 1.2

Dados dos puntos, se puede hablar de la recta que pasa por esos dos puntos, o bien del segmento entre esos dos puntos.

En el caso del primer postulado, Euclides se refiere al segmento entre dos puntos. Aun cuando Euclides no lo menciona explícitamente en estos postulados subyace la propiedad de que la recta que pasa por dos puntos es única y de esta manera lo asumiremos en el curso. De hecho, algunos autores consideran el equivalente del primer postulado como: *Es posible trazar una única recta que pase por dos puntos dados*, o bien, *Si dos rectas tienen dos puntos en común coinciden en todos sus puntos.*

> *Postulado 3* (Es posible) trazar un círculo con cualquier centro y distancia (radio).

El tercer postulado indica que se puede trazar una circunferencia que tenga como centro cualquier punto y que pase por cualquier otro punto.



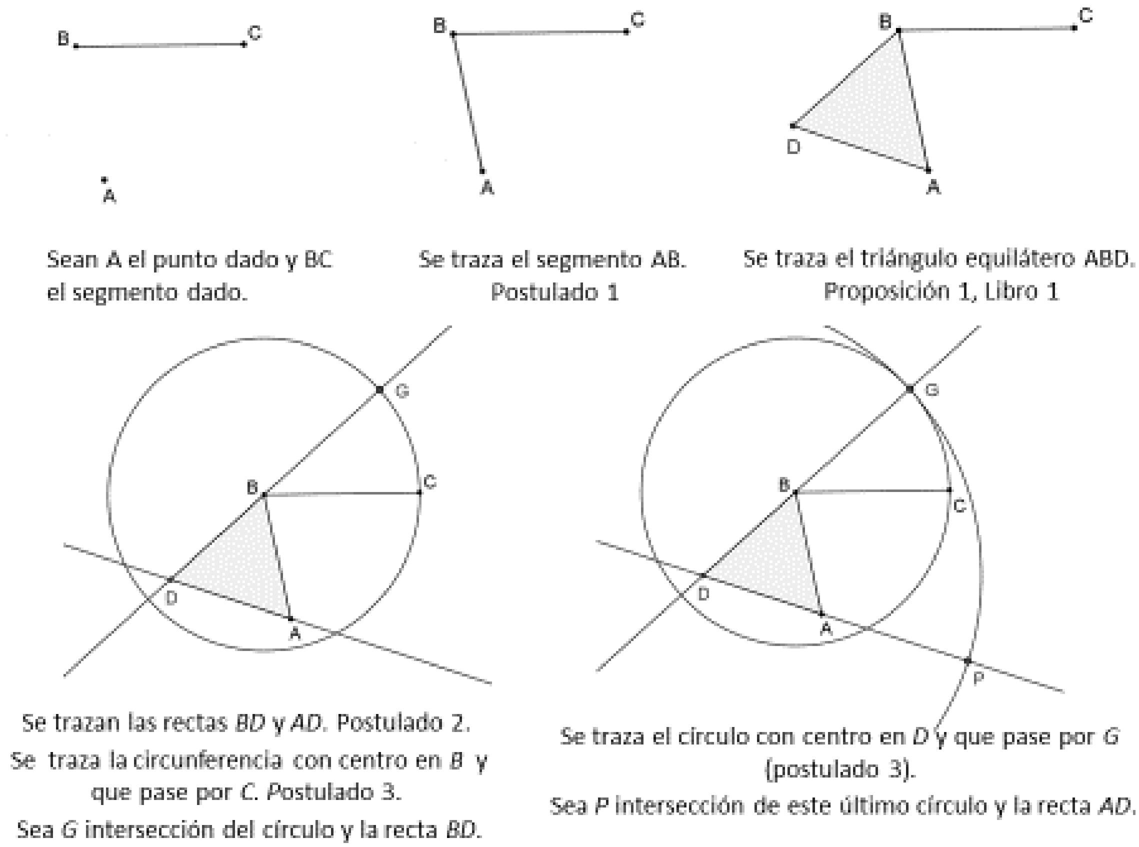
Tercer postulado

Figura 1. 3

Este postulado restringe el uso del compás que conocemos actualmente, ya que no permite transportar distancias, esto es como si al levantar el compás del papel se cerrara automáticamente. Llamaremos a este compás que no permite transportar distancias "compás euclidiano", y al que conocemos que sí permite hacerlo "compás moderno". Aparentemente este hecho restringe las construcciones que se pueden hacer con el primero. Sin embargo, la segunda proposición del libro I de Euclides demuestra que sí es posible transportar distancias: *(Es posible) colocar a partir de un punto dado (como extremo) una recta igual a otra dada.*

Para demostrar esta proposición Euclides solamente hace uso de los postulados y la primera proposición del libro I: *(Es posible) dada una recta finita, construir un triángulo equilátero.*

Se presenta a continuación la construcción realizada por Euclides.



Construcción 1.1

Esta construcción permite afirmar que cualquier construcción que se puede realizar con el compás moderno se puede también realizar con el compás euclidiano, aunque por un procedimiento más largo, porque cada vez que se requiere trasladar segmentos hay que hacer esta construcción adicional. Sin embargo, ya que los dos compases son equivalentes, usaremos el moderno por razones prácticas, sin pérdida de rigor.

¿Cuál es la característica de las construcciones que se pueden realizar con regla y compás?

Se ha visto cómo se pueden usar la regla y el compás y qué construcciones básicas se puede realizar con ellos: trazar rectas y círculos; pero, de acuerdo con lo que se mencionó al inicio de la sección, para llevar a cabo una construcción se puede realizar un número finito de estas construcciones básicas. Esto es, se puede:

a) Trazar la recta que pasa por dos puntos.
b) Determinar el punto de intersección de dos rectas.
c) Trazar un círculo con centro en un punto dado y radio dado.
d) Determinar los puntos de intersección de una recta y un círculo.

e) Determinar los puntos de intersección de dos círculos.

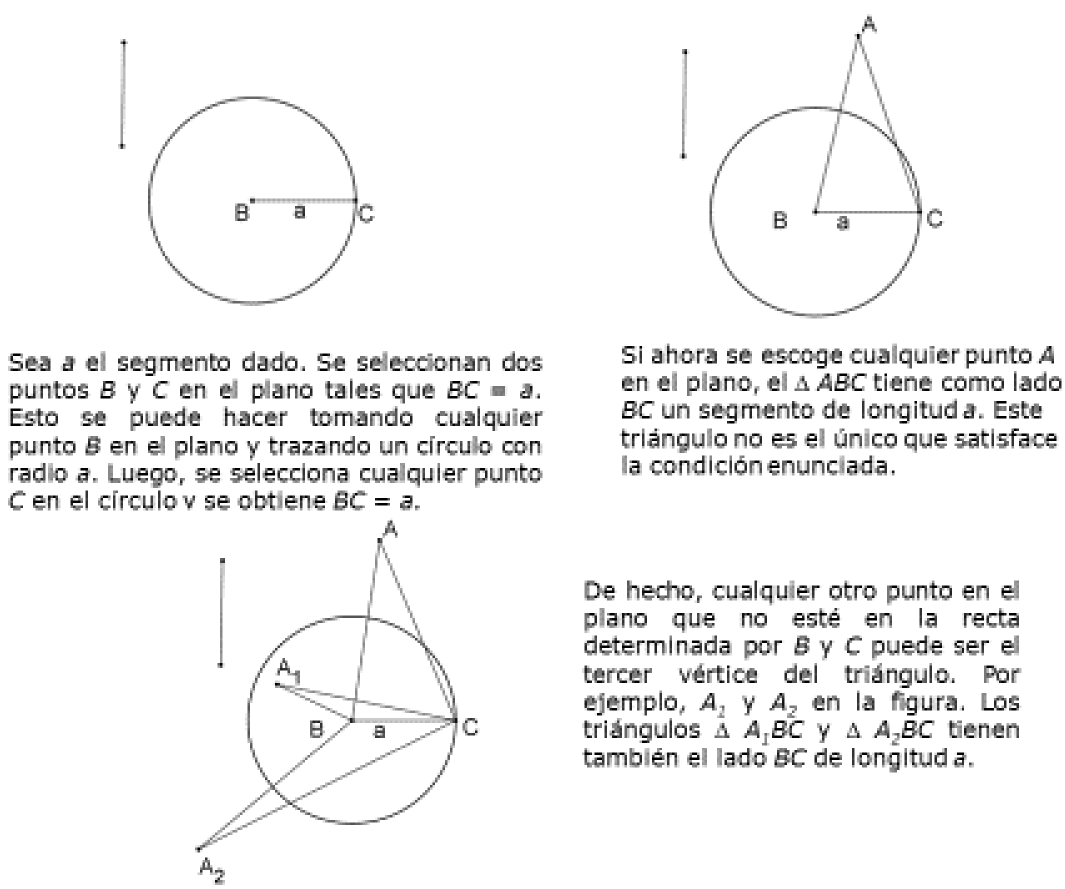
Cualquier construcción que se puede realizar con regla y compás, es una sucesión finita de estas construcciones.

Existen instrumentos además de la regla y el compás con los cuales es posible realizar construcciones geométricas. De hecho, en los intentos por trisecar el ángulo, duplicar el cubo y cuadrar el círculo los griegos hicieron uso de instrumentos mecánicos y desarrollaron curvas como la cuadratriz. Dados los objetivos de este curso nos ceñiremos a la regla y al compás moderno y no se abordarán estos tres problemas, pero se considera que conocer este episodio de la geometría se vuelve obligado para momentos posteriores, en los que el estudiante haya desarrollado una mayor habilidad geométrica y ampliado su conocimiento matemático.

1.1.4 *Construcción de triángulos*

Construcción 1.2

Construir un triángulo que tenga un segmento dado a como uno de sus lados.

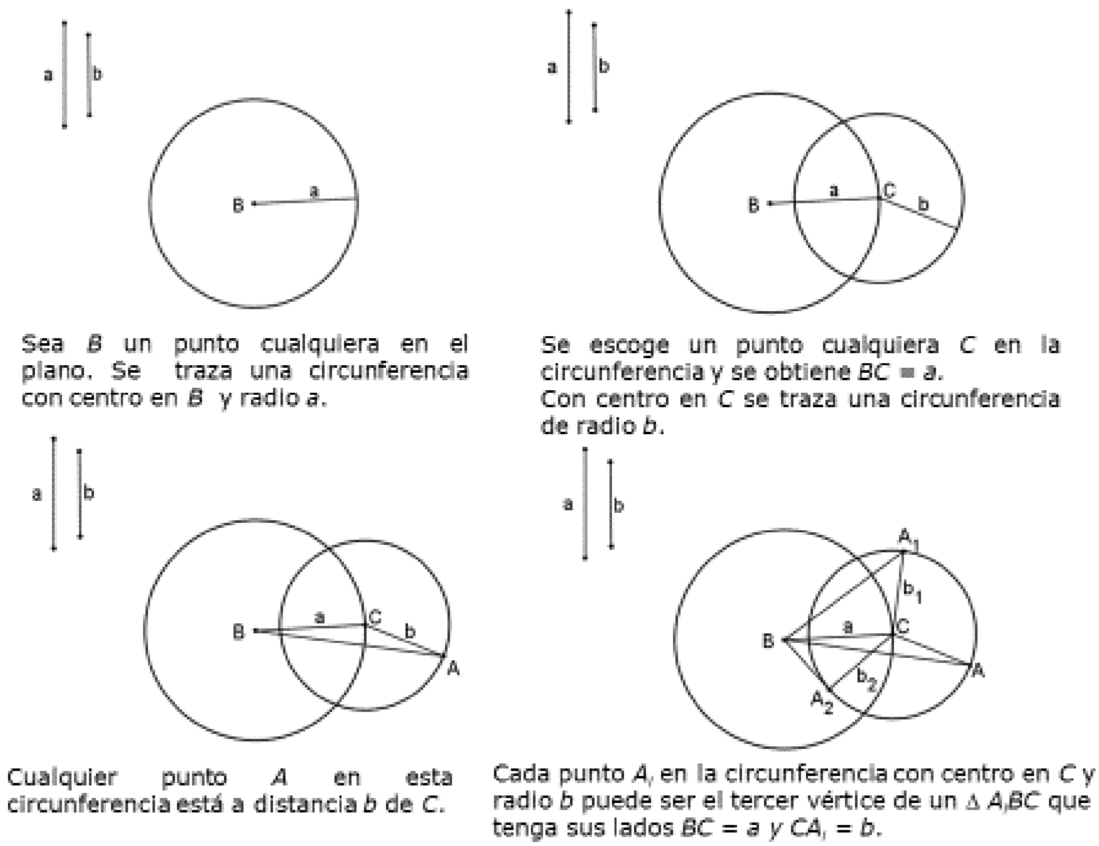


Construcción 1.2

Existen una infinidad de triángulos que tiene como lado un segmento de longitud *a*, tantos como puntos en el plano. Es también claro que los otros dos lados de los triángulos, no tienen en general la misma longitud cuando variamos el punto *A*. Se puede observar, además, que se podría haber escogido cualquier punto C_1, C_2, etc., en el círculo y la longitud de BC_1 y BC_2 también será igual al segmento dado *a.*

Construcción 1.3

Construir un triángulo que tengan dos segmentos dados a y b como lados.

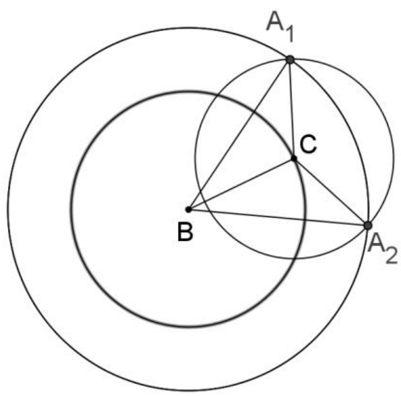


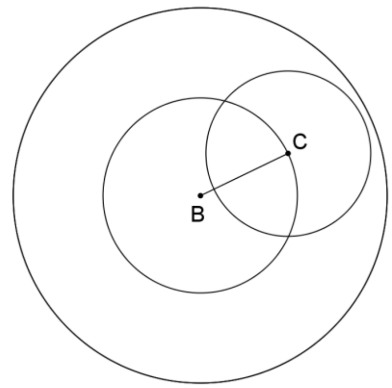
Construcción 1.3

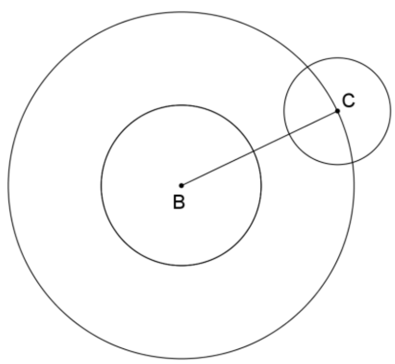
Existen una infinidad de triángulos que tienen dos de sus lados de longitud *a* y *b* respectivamente, tantos como puntos en el círculo de radio *b*. El tercer lado de los triángulos construidos, no tiene necesariamente la misma longitud cuando variamos el punto *A* sobre el círculo.

Actividad 1

Dados tres segmentos *a*, *b* y *c*, construye un triángulo que los tenga como lados. Determine si siempre se puede construir el triángulo. Si no siempre se puede construir, determine la relación que debe haber entre la magnitud de los lados para que sea construible.







No en todos los casos los círculos con centro en B y en C se intersectan y por tanto no existen A_1 y A_2.

¿De qué depende?

Puede ver el archivo *Construcción_1.4.gif*.

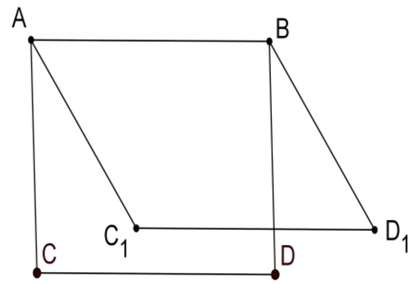
1.2. Congruencia de triángulos

Como se ha observado, algunas de las preguntas que se han hecho en la sección anterior con respecto a las construcciones realizadas son las relativas a bajo que condiciones se puede realizar esa construcción y a cuántos triángulos se pueden construir dadas esas condiciones.

Estas preguntas aparecen con frecuencia y son muy importantes en las matemáticas; se expresan usualmente como "existencia de la solución", esto es, si existe la solución a un problema dado y "unicidad de la solución", esto es si la solución que existe es única. En el caso de que haya más de una solución, es también de importancia conocer cuántas soluciones existen y de qué tipo son.

En el caso de las construcciones desarrolladas en la sección anterior, aún cuando dimos respuesta parcialmente a estas preguntas, no aclaramos en forma precisa que se quiere decir cuando hablamos de triángulos distintos.

En general se dice que dos figuras geométricas son *iguales* si tienen el mismo tamaño y la misma forma.



Los dos cuadriláteros tienen sus lados iguales, pero la forma no es igual.
¿Qué es lo que cambia?

Figura 1.4

Con la intención de que sea evidente cuando se habla de figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma y que el concepto quede descrito en forma precisa, se define la congruencia de figuras de la siguiente manera:

Dos figuras se dicen *congruentes*, si tienen respectivamente sus lados y ángulos de la misma magnitud. A los lados y ángulos correspondientes también se les llama homólogos.

Se utiliza el símbolo ≅ para denotar que dos figuras son congruentes.

En relación con los problemas de construcción que se presentaron en la sección *Construcción de triángulos*, cuando se quiere saber el número de triángulos que se pueden construir, se está haciendo referencia a cuántos triángulos no congruentes se pueden construir. Esto es, se considera que todos los triángulos congruentes son la misma solución.

Dicho de otra forma, aún cuando la posición relativa de los triángulos en el plano sea diferente, se consideran como la misma solución, si son congruentes.

Dos triángulos son congruentes si tienen iguales sus lados y sus ángulos, esto es, se requiere la igualdad de seis elementos. Seguramente recuerda que en el caso de los triángulos si tres de sus elementos son iguales, no cualesquiera tres, se puede asegurar que los triángulos son congruentes.

Si dos triángulos tienen dos de sus lados respectivamente iguales y el ángulo entre ellos igual, entonces los triángulos son congruentes. Esta propiedad es la proposición 4 del libro I de Euclides, quien la demostró superponiendo los triángulos[6]. En realidad, esta propiedad no es demostrable a partir de los postulados establecidos en los Elementos.

Las otras dos propiedades que permiten establecer la congruencia de dos triángulos son:

Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente iguales entonces son congruentes.

Si dos triángulos tienen un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales entonces son congruentes.

A estas propiedades se les llama criterios de congruencia de triángulos y para fines prácticos se les denota usualmente como LAL (lado, ángulo, lado) a la primera; LLL (lado, lado, lado) a la segunda y ALA (ángulo, lado, ángulo) a la tercera.

Si se analizan las construcciones que se realizaron en esta sección, se observa que solamente se construyeron rectas, segmentos, círculos, puntos sobre los círculos e intersecciones de círculos en cada uno de los casos. Esto indica que las construcciones que se han realizado se pueden hacer con regla y compás. A partir de este momento, cada vez que se requiera hacer otra construcción que involucre en el proceso trasladar segmentos o construir triángulos como los que hemos construido en las construcciones 1.1, 1.2, 1.3 o 1.4, ya no realizaremos la construcción sino la daremos como ya realizada, con la finalidad de obtener figuras más claras.

Actividad 2

1) Realice las construcciones 1.2, 1.3 y 1.4 de esta sección con el programa Geogebra.
2) En relación con la construcción 1.3 responda las siguientes preguntas y justifique su respuesta.
    a) ¿Es único el triángulo que se puede construir?
    b) ¿Es el tercer lado igual en todos los triángulos?
    c) ¿Qué se puede decir de sus ángulos?
3) En relación con la construcción 1.4 de esta sección responda las siguientes preguntas y justifique su respuesta.
    a) Enuncie la condición que encontró en la Actividad 2 para que dados tres segmentos se pueda construir un triángulo que los tenga como lados.

[6] En la actualidad, esta situación se ha precisado diciendo que dos figuras son congruentes si una puede hacerse coincidir con la otra a través de transformaciones rígidas del plano (las que conservan la métrica). Esta perspectiva nace a partir del Programa de Erlangen de Félix Klein a finales del siglo XIX. En su obra, Klein plantea el estudio de las geometrías a través de los invariantes bajo ciertos grupos de transformaciones.

b) ¿En dado caso, cuántos triángulos se pueden construir que tengan como sus lados tres segmentos dados?
c) ¿Qué se puede decir de sus ángulos?

Actividad 3

Construya dos triángulos que tengan dos lados iguales y un ángulo igual y que no sean congruentes. Haz la construcción con Geogebra.

Algunos problemas con puntos inaccesibles

Se ha mencionado que Tales de Mileto calculó la distancia de un barco a la playa. Este tipo de problema involucra lo que llamamos puntos inaccesibles ya que no se pueden utilizar para realizar directamente la medición, pero se pueden determinar los ángulos que forman las visuales al punto con una recta accesible.

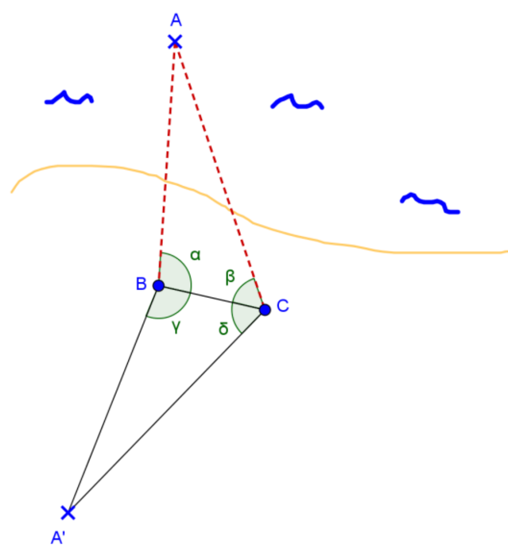


Figura 1.5

En la figura 1.5, *A* representa al barco y *B* al punto a la playa desde donde se quiere medir la distancia a *A*; las dos rectas punteadas representan las visuales desde el punto *B* y desde otro punto cualquiera *C* en la playa.

Aun cuando no se sabe con precisión la forma en que Tales de Mileto pudo haber resuelto el problema, bien pudo ser transportando los ángulos α y β que forman las visuales al punto *A* con el segmento *BC* construyendo los ángulos γ y δ de tal forma que $\alpha = \gamma$ y $\beta = \delta$. Los triángulos *ABC* y *A’BC* resultan congruentes por ALA y se tiene que *AB* = *A’B*, quedando resuelto el problema.

Una forma en que Tales pudo haber transportado los ángulos es la siguiente: tomando dos tiras de madera y sujetando con un perno uno de los extremos de cada una de ellas. Poniendo así el perno en el vértice del ángulo que quería transportar y cada una de las tiras en la dirección de los lados del ángulo. Fijando entonces las tiras de tal forma que la abertura entre ellas no cambiara. Actualmente no se tiene la necesidad de utilizar un instrumento semejante a éste para transportar ángulos, se cuenta con el "transportador". Sin embargo, en una de las actividades siguientes se pedirá que se transporten los ángulos con regla y compás.

Si se toma en cuenta que una de las actividades importantes de las antiguas civilizaciones fue la Astronomía, se puede asegurar que trabajar geométricamente con puntos inaccesibles, pero visibles, tuvo entonces particular interés.

Actividad 4

Resuelva los siguientes problemas que involucran puntos inaccesibles o bien para los que no se puede realizar la medición directa. Haz un diagrama en cada caso.

1) Encuentre una forma distinta a la presentada en el texto para calcular la distancia de un barco a la playa.
2) Encuentre la distancia *AB* entre dos puntos accesibles, pero que estén separados por un obstáculo que impide la medición directa (un lago, por ejemplo).
3) Encuentre la distancia *AB* entre dos puntos que están separados por un obstáculo no acotado que impide la medición directa (un río, por ejemplo).
4) Dos rectas l y l' accesibles, se intersectan en un punto invisible e inaccesible *A*. Encuentra la distancia entre *A* y un punto accesible *O*.
5) Encuentre la distancia entre dos puntos visibles, pero inaccesibles *A* y *B* (dos barcos, por ejemplo).

Actividad 5

Realice las siguientes construcciones con regla y compás y justifique que ha construido efectivamente el objeto deseado.

1) Dado un ángulo α y un segmento de recta *PQ*, construir un ángulo igual a α que tenga como vértice a *P* y como uno de sus lados a *PQ*.
2) Construir la bisectriz de un ángulo dado α. Recuerde que la *bisectriz* de un ángulo es la recta que pasa por su vértice y lo divide en dos partes iguales.
3) Dada una recta *m* y un punto *P* cualquiera del plano construir una recta perpendicular a *m* que pase por *P*. Considere los diferentes casos dependiendo si *P* está en la recta *m* o fuera de ella.

4) Construir el punto medio de un segmento *AB*.

5) Construir la mediatriz de un segmento *AB*. Recuerde que la *mediatriz* de un segmento es la recta perpendicular al segmento por su punto medio.

1.3 Más sobre los Elementos de Euclides

Cabe ahora hablar un poco más sobre la obra de Euclides. Esta obra está compuesta por trece libros. El Libro I trata congruencia, paralelas, el teorema de Pitágoras, figuras equivalentes (en área) y paralelogramos y en él se incluyen las definiciones de los conceptos, nociones comunes y postulados que se usarán posteriormente en el texto; el II aborda el álgebra geométrica; el III trata sobre círculos y las propiedades de las tangentes, ángulos inscritos, centrales, etc.; el IV sobre polígonos inscritos y circunscritos; el V, basado sobre la obra de Eudoxio, es sobre proporciones, también tratadas geométricamente incluyendo segmentos inconmensurables; el VI sobre polígonos semejantes, del VII al IX sobre teoría de números; el X sobre magnitudes inconmensurables y del XI al XIII sobre Geometría Sólida[7]. (Kline, 1972).

Algunas de las definiciones:

Definición 1. Un *punto* es lo que no tiene partes.

Definición 2. Una *línea* es una longitud sin anchura.

Definición 3. Los extremos de una línea son *puntos*.

Definición 4. Una *recta es una línea* que yace llanamente sobre sus puntos.

Definición 5. Una *superficie* es la que sólo tiene longitud y anchura.

Definición 10. Cuando una recta corta a otra formando ángulos adyacentes iguales, cada uno de los ángulos iguales se llama ángulo *recto*, y la recta que se eleva sobre la otra se llama *perpendicular* a ésta.

Definición 15. Un *círculo* es una figura plana rodeada por una línea tal que todas las rectas que inciden sobre ella desde un cierto punto interior a la figura son iguales entre sí.

Definición 23*. Rectas paralelas* son aquellas que, estando en el mismo plano, no se encuentran cuando se prolongan indefinidamente en ambas direcciones.

Como es claro, las primeras definiciones están cargadas de contenido material e intuitivo, pretenden hacer abstracción del mundo real. Asimismo, algunos de los términos son imprecisos. En la actualidad cuando se trabaja con sistemas axiomáticos, los términos primitivos como punto, recta, superficie, etc. no se

[7] Para mayor información sobre este tema pueden consultarse Kline (1972) y Heath (1956) de la bibliografía de referencia.

definen y su naturaleza está dada por sus relaciones, aportadas implícita o explícitamente por los axiomas.

Como se ha mencionado, en la obra se incluyen cinco postulados y cinco nociones comunes, a las que Proclo llama axiomas. Aristóteles hacía la distinción que las nociones comunes eran aplicables a todas las ciencias y los postulados solamente a la Geometría e incluso afirmaba que no se precisa la certeza de que los postulados fueran verdaderos, y que su veracidad se comprobaría al confrontar con la realidad los resultados de ellos deducidos.

Postulados:

Postulado 1. (Es posible) trazar una recta desde cualquier punto a cualquier otro.

Postulado 2. (Es posible) prolongar continuamente en línea recta una recta dada.

Postulado 3. (Es posible) trazar un círculo con cualquier centro y distancia (radio).

Postulado 4. Que todos los ángulos rectos son iguales.

Postulado 5. Si una recta incide sobre otras dos formando del mismo lado, ángulos internos menores que dos rectos, al prolongarlas indefinidamente se encontrarán por el lado en que los ángulos sean menores que dos rectos.

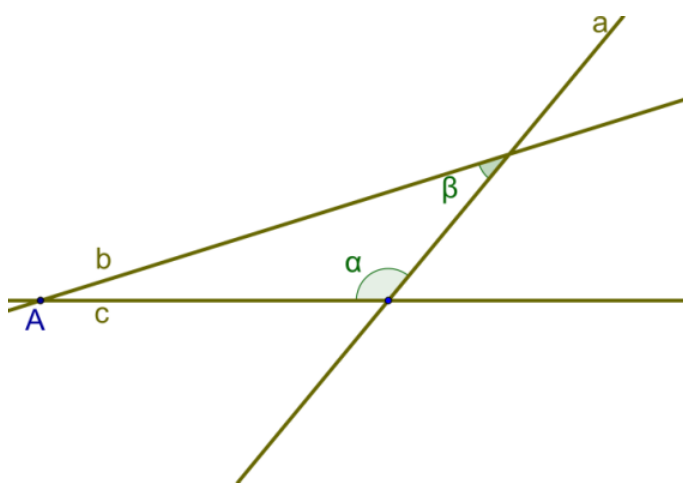


Figura 1.6

Nociones Comunes:

Noción común 1. Cosas que sean iguales a la misma cosa son también iguales entre sí.

Noción común 2. Si a cosas iguales se suman cosas iguales, los totales son iguales.

Noción común 3. Si a cosas iguales se restan cosas iguales, los restos serán iguales.

Noción común 4. Cosas que encajen cada una en la otra son iguales entre sí.

Noción común 5. El todo es mayor que la parte.

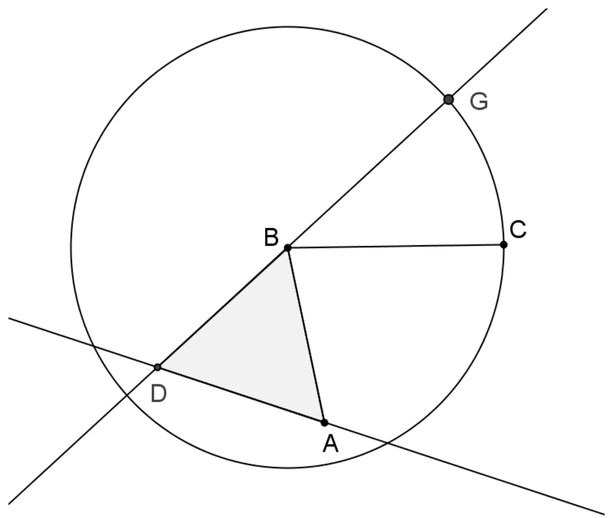
Actividad 6

Analiza las proposiciones 5, 6, 13, 14, 15, 16 y 22 del libro I de Euclides. Puedes encontrar las proposiciones y demostraciones correspondientes en la liga: http://newton.matem.unam.mx/geometria/.

Al final de la sección 1.1 se habló de las ideas de Platón, al respecto de prescindir en la matemática de cualquier apoyo sensible, de cualquier referencia a lo material. Sin embargo, Euclides usa algunos argumentos aceptables desde la experiencia del mundo material, pero que no todos son consecuencia de sus suposiciones iniciales. Si se revisan las construcciones formuladas en las proposiciones 1 y 22 del libro I, para construir un triángulo equilátero sobre un segmento, así como para construir un triángulo dados tres segmentos como lados, se afirma que cierto par de círculos se intersecan. Ni en las definiciones, ni en las nociones comunes o postulados formula Euclides alguna propiedad para garantizar que dos círculos se intersequen, si bien lo hace para que dos rectas lo hagan en el quinto postulado. Tampoco da una razón en sus demostraciones sobre por qué existe esta intersección. Hemos hecho esto mismo en las construcciones que hemos realizado. La razón para hacerlo es que al trazar los círculos en el papel o mediante el programa Geogebra se intersecan materialmente. Sin embargo, esto no está garantizado por los postulados propuestos por Euclides.

En el caso de la construcción 1.4 (proposición 22 del libro I) son dos los asuntos involucrados, uno es la posición relativa de los círculos que pueden estar muy alejados o uno contenido en el otro y evidentemente no hay intersección.

Pero en el caso en que una parte del círculo está dentro del otro, pero otra parte está fuera de él, se aprecia que deberían intersecarse. Recuerde que en la construcción 1.4 los círculos se intersecan o no, dependiendo de cómo varían las longitudes a, b y c. El segundo asunto es éste, ¿por qué existe el punto de intersección en el último caso? Para responder esta pregunta ahora, se piensa inmediatamente en el concepto de continuidad, sin embargo, no es hasta el siglo XIX que los conceptos de números reales y continuidad se formalizaron, por lo que no formaban parte del entorno matemático de Euclides, por lo que se puede inferir que para Euclides esto era parte de su experiencia material, esto es, se pueden considerar como parte de sus postulados implícitos. De la misma forma, en la construcción formulada en la proposición 2, se propone que la existencia del punto *P*, en la construcción 1.1, como la intersección del círculo y la recta *DA*, sin que tampoco se fundamente su existencia, más allá de la experiencia material.



Se trazan las rectas *BD* y *AD* (postulado 2). Se traza el círculo con centro en *B* y que pase por *C* (postulado 3). Sea *G* intersección del círculo y la recta *BD*.

Figura 1.7

En resumen, en los Elementos se emplean algunos elementos que no forman parte de los axiomas ni de las nociones comunes, pero que formaban parte de la experiencia material de Euclides. La continuidad de las figuras en este caso. La falta de este tipo de postulados ha sido calificada por algunas corrientes como "fallas" en el trabajo de Euclides, pero realmente pueden considerarse producto de la concepción griega de la geometría como una representación del espacio físico.

Los Elementos de Euclides fueron por mucho tiempo modelo de la teoría matemática deductiva y los postulados de los Elementos fueron considerados verdades universales del espacio físico durante muchos siglos, hasta el surgimiento de las geometrías no euclidianas. Tuvieron que pasar muchos siglos para que el carácter de la axiomatización evolucionara.

En la matemática moderna, la verdad de los resultados en el mundo real no es relevante, lo importante es si son consistentes y si la teoría en cuestión se puede deducir a partir de los postulados. En el caso de la fundamentación de la geometría, tuvieron que pasar más de veinte siglos y una gran transformación de las matemáticas para que se desarrollara una nueva axiomática para la geometría euclidiana, que retomó la axiomática de Euclides y utilizó los nuevos conceptos y áreas desarrolladas.

Entre los axiomas que se introducen en la Fundamentación de la Geometría de Hilbert están los de congruencia, en particular la proposición 4 de Euclides, los de orden y los de continuidad. Con la Fundamentación de la Geometría de Hilbert, las demostraciones se vuelven menos dependientes de las figuras y se puede asegurar las condiciones en las que se intersecan las rectas y las circunferencias (en otras palabras, las rectas y las circunferencias son continuas, no tienen agujeros).

Retomar el trabajo de Euclides o de Hilbert, en el sentido de ir demostrando cada una de las propiedades básicas y con base en estos resultados demostrar otras propiedades de mayor interés, requiere un tiempo mayor al programado para este curso. El interés que en todo caso tiene seguir por ese camino está relacionado con el estudio de la fundamentación de la geometría, que no es el objeto de nuestro estudio.

Por ello, se tomarán algunos resultados como ya demostrados para el posterior desarrollo del curso. Los elementos adicionales a los postulados de Euclides que se tomarán, algunos de los cuales se considera son naturales para el estudiante, ya sea por su carácter intuitivo o bien por la familiaridad que se supone que tiene el estudiante con ellos, permitirán tener un tratamiento más ágil. En este momento no preocupa que las propiedades propuestas sean independientes, sino que permitan un desarrollo consistente de las propiedades geométricas y que apoyen al mismo tiempo la construcción del sentido geométrico de los estudiantes.

Dividimos las propiedades que se tomarán como elementos de partida en cinco grupos.

1. Las propiedades generales que forman parte de los postulados y del libro 1 de Euclides:
    a) los 5 postulados de Euclides,
    b) la proposición 2: "*(Es posible) colocar a partir de un punto dado (como extremo) una recta igual a otra dada".*
    c) las propiedades de congruencia de triángulos (proposiciones 4, 8 y 26),
    d) la desigualdad del triángulo (proposición 20): *Dado un triángulo, la suma de cualesquiera dos lados es mayor que el tercero*,
    e) las proposiciones 13 y 14: "*Si dos rectas se cortan forman ángulos adyacentes rectos o que suman dos rectos"* y "*Si dos ángulos adyacentes*

suman dos ángulos rectos, los lados no adyacentes de los ángulos son colineales”,

f) proposición 15: “*Dos rectas que se cortan una a la otra producen ángulos opuestos iguales”*.

2. Las propiedades del libro I relacionadas con las paralelas.

Cabe mencionar que Euclides no utilizó el V postulado para demostrar las primeras 28 proposiciones y es hasta la demostración de la proposición 29 que lo utiliza

a) proposición 27: “*Si una recta al cortar dos rectas hace ángulos alternos internos iguales entre sí, entonces tales rectas serán paralelas entre sí*”.

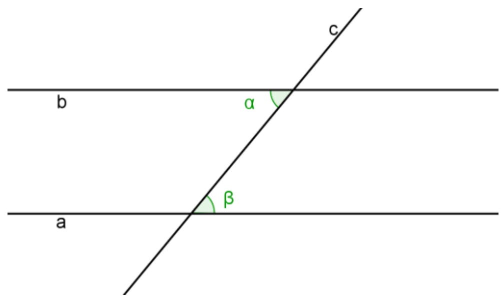


Figura 1.8

En la figura 1.8, la recta *c* corta a las rectas *a* y *b*, si si $\alpha = \beta$, entonces las rectas *a* y *b* son paralelas.

b) proposición 28: “*Si una recta al cortar dos rectas forma el ángulo externo igual al ángulo interno y opuesto del mismo lado, o los dos ángulos internos del mismo lado suman dos ángulos rectos, entonces las rectas serán paralelas entre sí*”,

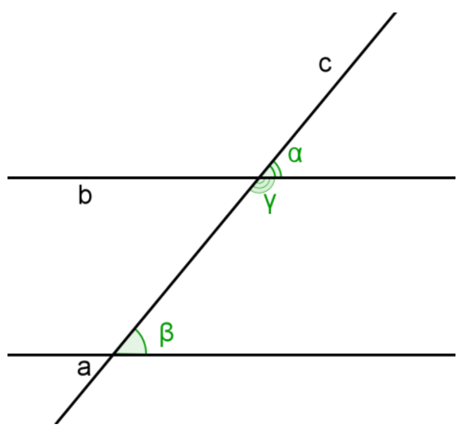


Figura 1.9

En la figura 1.9, la recta *c* corta a las rectas *a* y *b*, si si $\alpha = \beta$, entonces las rectas *a* y *b* son paralelas. O bien, si $\beta + \gamma$ suman dos rectos, entonces las rectas *a* y *b* son paralelas.

c) proposición 29: "*Una recta al cortar dos rectas paralelas hace los ángulos alternos internos iguales entre sí, el ángulo externo igual al ángulo interno y opuesto del mismo lado, y la suma de los dos ángulos internos del mismo lado igual a dos ángulos rectos*",

3. Las propiedades relativas a la intersección de rectas y círculos bajo ciertas condiciones, derivadas de la continuidad de las rectas y las circunferencias:

a) Sean *A*, *B* y *C* tres puntos no colineales y *m* una recta que no pasa por ninguno de estos tres puntos, si *m* corta el lado *BC* del triángulo entonces corta al lado *AB* o al lado *AC* (Axioma de Pasch).

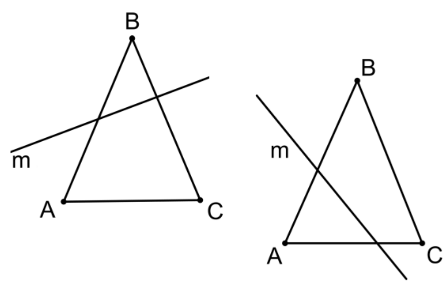


Figura 1.10

En la figura 1.10 se muestran las dos posibilidades, en el caso de que la recta *m* corte al lado *AB,* esto es*,* si corta a *AB* entonces corta a *BC* o a *AC.* Esta propiedad se puede ver intuitivamente como si la recta que entra al triángulo por uno de sus lados, tiene que salir por alguno de los otros dos.

b) Cualquier punto *P* en una recta *m* divide la recta en dos semirrectas ajenas; si *Q* y *R* son dos puntos, uno en cada semirrecta, decimos que el punto *P* está entre *Q* y *R*.

c) Cualquier recta *m* divide al plano en dos semiplanos ajenos; si *P* y *Q* son dos puntos, uno en cada semiplano, el segmento *PQ* corta a la recta *m*, si P y R son dos puntos en el mismo semiplano, el segmento PR no corta al segmento.

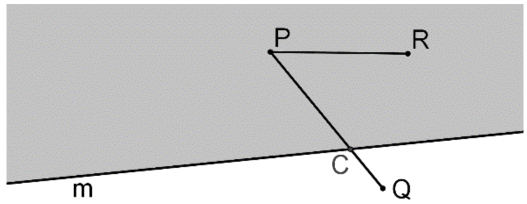


Figura 1.11

En la figura 1.11 se muestra la recta m. Para distinguir los dos semiplanos se ha sombreado uno de ellos. P y Q están en diferente semiplano y el segmento PQ corta a m en C. Si P y R están en el mismo semiplano el segmento PR no corta a la recta m.

d) Cualquier circunferencia divide al plano en dos regiones ajenas, el interior y el exterior; si P es punto en el interior, cualquier recta que pasa por P corta la circunferencia en dos puntos.

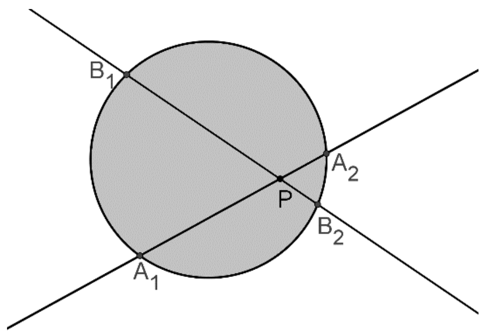


Figura 1.12

En la figura 1.12 se muestra una circunferencia. Para distinguir el interior del exterior, se ha sombreado el interior. P está en el interior, cualquier recta por PQ corta al círculo en dos puntos A_1 y A_2 o B_1 y B_2, por ejemplo. Se dice que la recta es una secante del círculo.

e) Dos circunferencias de radio r y s respectivamente, se intersecan en uno o dos puntos si y sólo si $a \leq r + s; r \leq a + s; s \leq a + r.$

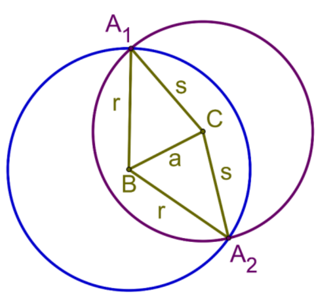


Figura 1.13

En la figura 1.13 se ilustra la propiedad anterior, si $a < r + s$, $r < a + s$ y $s < a + r$, entonces la circunferencia con centro en B y radio r y la circunferencia con centro en C y radio s se intersecan en dos puntos. En la figura les llamamos A_1 y A_2.

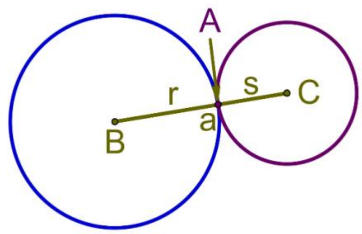


Figura 1.14

En la figura 1.14 se ilustra la propiedad anterior, si $a = r + s$, entonces la circunferencia con centro en B y radio r y la circunferencia con centro en C y radio s se intersecan en un solo punto. En la figura le llamamos A.

Antes de enunciar las propiedades relacionadas con el área se verán algunos aspectos de cómo fue tratada por Euclides. A partir de la proposición 35, Euclides introduce otro concepto de igualdad, adicional al ya visto en el caso de la congruencia de triángulos, en esta ocasión referida al área de los polígonos. En este caso, la igualdad también es un término indefinido. Además, no hace uso de números para medir áreas, sino que establece relaciones entre ellos. Con la intención de tener mayor claridad veamos las ideas involucradas en la demostración de la proposición 35 del libro I.

Proposición 35. *Los paralelogramos que están sobre la misma base y están contenidos entre las mismas paralelas, son iguales.*

Sean *ABCD* y *EBCF*, los paralelogramos que tienen la misma base *BC*. Sean *BC* y *AF* paralelas.

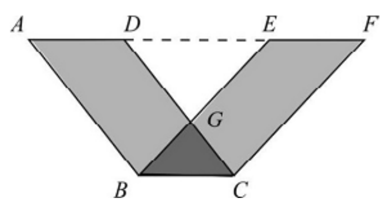


Figura 1.15

Euclides demuestra que los triángulos *ABE* y *DCF* son congruentes y en consecuencia sus áreas son iguales. Con esta igualdad y quitando de los dos triángulos el triángulo GDE, concluye que los trapecios *BGDA* y *CGEF* son iguales y finalmente aumentando a cada uno de estos dos trapecios el triángulo *BCG* llega a conclusión de que *ABCD* y *EBCF* son iguales. En esta demostración, así como en las demás demostraciones del libro I relacionadas con área, Euclides no hace uso de magnitudes sino de la comparación entre las figuras geométricas, utilizando de manera esencial las nociones comunes y el hecho de que figuras congruentes tienen áreas iguales. En la actualidad el concepto de área puede introducirse formalmente en contextos muy diversos y con alcances diversos también. En este curso solamente se utilizarán resultados básicos sobre el área de polígonos y círculos.

4. Las propiedades relacionadas con el área.

   a) Dos figuras congruentes tienen la misma área.

   b) Dos figuras equicompuestas tienen la misma área[8].

   c) Proposición 35 del libro 1: *Los paralelogramos que están sobre la misma base y están contenidos entre las mismas paralelas, son iguales.*

   d) Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está contenido entre las mismas paralelas, el paralelogramo (su área) es el doble del triángulo (Proposición 41 del libro I).

   e) Los triángulos y paralelogramos (es decir sus áreas), que están bajo la misma altura son entre sí como sus bases (Proposición 1 del libro VI)

5. Las propiedades relacionadas con ángulos centrales y área del círculo.

   a) En una misma circunferencia o en circunferencia iguales, dos ángulos centrales son iguales si y sólo si subtienden arcos y cuerdas iguales (Proposiciones 26, 27 y 29 del libro III).

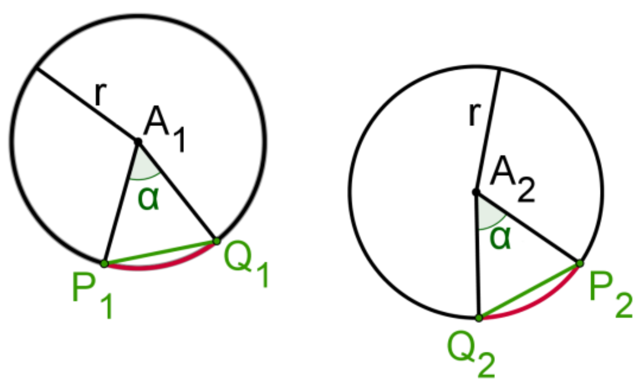


Figura 1.16

Se llama ángulo central de una circunferencia a un ángulo con vértice en el centro de la circunferencia. Se llama arco subtendido al arco de circunferencia determinado por las intersecciones de los lados del ángulo con la circunferencia y cuerda al segmento determinado por estas intersecciones.

En la figura 1.16 se muestran dos circunferencias con radio igual a r, una con centro en A_1 y otra con centro en A_2. Se tiene en cada circunferencia un ángulo central igual a α.

---

[8] Se dice que dos figuras son equicompuestas si se puede descomponer una de ellas en figuras ajenas con las cuales es posible componer la segunda figura.

De acuerdo con la propiedad enunciada, el arco P_1Q_1 que subtiende el ángulo α en la circunferencia con centro en A_1 y radio r es igual al arco P_2Q_2 que subtiende el ángulo α en la circunferencia con centro en A_2 y radio r. Asimismo, la cuerda P_1Q_1 que subtiende el ángulo α en la circunferencia con centro en A_1 y radio r es igual al segmento P_2Q_2 que subtiende el ángulo α en la circunferencia con centro en A_2 y radio r. Inversamente, si los arcos o las cuerdas P_1Q_1 y P_2Q_2 son iguales, entonces los ángulos centrales que los abarcan son iguales.

b) En circunferencias iguales, los ángulos centrales guardan la misma razón que las circunferencias sobre las que están (Proposición 33, libro VI).

c) Los círculos (sus áreas) son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros (Proposición 2, libro XII).

Si A_1 y A_2 son las áreas de dos círculos de diámetros d_1 y d_2, actualmente se puede expresar la proposición anterior como:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{{d_1}^2}{{d_2}^2} = constante\ .$$

1.4 Las demostraciones en Geometría

1.4.1 ¿Qué es una demostración?

En esta sección y en la 1.6 se presentan algunas orientaciones sobre la demostración en matemáticas.

Se puede decir que una demostración es una serie de argumentos (inferencias) por medio de los cuales se deduce que una proposición es verdadera. Así, en la demostración de cada teorema geométrico se realizan una serie de deducciones con base en los axiomas o teoremas ya demostrados. La pregunta obligada es entonces, ¿qué condiciones debe satisfacer una demostración para ser válida?

- Debe basarse en proposiciones verdaderas, esto es, en las definiciones, los axiomas y proposiciones ya demostradas como verdaderas.
- Las inferencias de que conste la demostración deben estar bien construidas.
- Si las premisas son verdaderas la conclusión no puede ser falsa.

Lo cual abre otra pregunta, ¿cuáles son las inferencias bien construidas?

De acuerdo con Fetisov (1980), la mayoría de las inferencias en las demostraciones geométricas sigue alguno de los siguientes esquemas:

- Si *p* entonces *q*
- Si *q* entonces *r*
- Luego si *q* entonces *r*

- Si *p* entonces *q*
- Si *q* entonces *no r*
- Luego si *q* entonces *no r*

En estos esquemas, *p*, *q* y *r* están simbolizando *proposiciones*, esto es, *enunciados que son verdaderos o son falsos*. Este es el principio que en lógica se llama del *tercero excluido*. No hay otra alternativa, cada proposición es verdadera o es falsa.

Las diferentes formas de articular los elementos de una demostración conducen a diferentes tipos de demostraciones. En esta sección y en la sección 1.6, se referirán las que se consideran más usuales.

1.4.2 Conectivos lógicos

Una proposición compuesta está formada por proposiciones simples como *p*, *q* y *r*, etc., conectadas de diferentes formas. Los conectivos lógicos más comunes son *no*, *y*, *o* y *si…entonces*.

La proposición "*no p*", que se simboliza $\neg p$, se denomina la negación de *p*; la proposición "*p y q*", que se simboliza como $p \wedge q$, se denomina la conjunción de *p* y *q*; la proposición "*p o q*" que se simboliza como $p \vee q$, se denomina la disyunción de *p* y *q* y la proposición "*si p entonces q*" que se simboliza como $p \Rightarrow q$, se denomina la condicional.

La proposición $\neg p$ es la negación de la proposición *p*, por ejemplo, si *p* es la proposición *los paralelogramos son cuadriláteros*, entonces la proposición $\neg p$ es *los paralelogramos no son cuadriláteros*. Otro principio lógico importante es que si *p* es verdadera entonces $\neg p$ es falsa y viceversa. A este principio se le llama de no contradicción.

La proposición $p \wedge q$ es la conjunción de estas dos proposiciones, por ejemplo, si *p* es la proposición *los paralelogramos son cuadriláteros* y *q* es la proposición *los paralelogramos tienen los ángulos opuestos iguales*, la proposición $p \wedge q$ es entonces *los paralelogramos son cuadriláteros y tienen sus ángulos opuestos iguales.* La proposición $p \wedge q$ es verdadera solamente cuando las dos proposiciones simples *p* y *q* son verdaderas.

La proposición $p \vee q$ es la disyunción de estas dos proposiciones, por ejemplo, si *p* es la proposición *los paralelogramos son cuadriláteros* y *q* es la proposición *los paralelogramos tienen los ángulos opuestos iguales*, la proposición $p \vee q$ es entonces *los paralelogramos son cuadriláteros o tienen sus ángulos opuestos iguales.* La proposición $p \vee q$ es verdadera cuando alguna de las dos proposiciones simples *p* y *q* es verdadera.

La proposición $p \Rightarrow q$, llamada condicional es, por ejemplo, si *p* es la proposición *el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo* y *q* es la proposición *los ángulos opuestos del cuadrilátero ABCD son iguales*, la proposición $p \Rightarrow q$ es entonces si *el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo entonces sus ángulos opuestos iguales.*

Al igual que en el caso de las otras proposiciones compuestas, sus valores de verdad, es decir si esta proposición es verdadera o falsa, dependen de los valores de verdad de las proposiciones p y q.

En una proposición compuesta del tipo $p \Rightarrow q$, a la proposición p se le llama hipótesis o antecedente y a la proposición q se le llama conclusión o consecuente.

- El enunciado condicional afirma que la hipótesis implica la conclusión.
- No afirma que la hipótesis sea verdadera, sino que, si la hipótesis es verdadera, entonces también la conclusión es verdadera.

Esta proposición sólo tiene valor de verdad falso cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa (si las premisas son verdaderas, la conclusión no puede ser falsa). Además, de una premisa falsa puede deducirse cualquier cosa.

Como se ha mencionado, los teoremas tienen esta forma condicional.

Hay varios métodos de demostración para este tipo de proposiciones, basados en proposiciones que son lógicamente equivalentes.

¿Qué quiere decir que dos proposiciones son lógicamente equivalentes?

Para ver cuando dos proposiciones son lógicamente equivalentes se utilizan las *tablas de verdad*. Una tabla de verdad es un arreglo que permite conocer los posibles valores de verdad de una proposición compuesta a partir de los valores de verdad de las proposiciones simples. *Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si sus valores de verdad son los mismos.*

La tabla de verdad de la proposición compuesta $p \Rightarrow q$ es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

Tabla 1.1

1.4.3 Demostración directa:

En el método de la demostración directa para $p \Rightarrow q$, se inicia con la proposición p, que se supone verdadera, y se deduce a partir de ella una nueva proposición p_1 que es verdadera como resultado de que p lo es, y así sucesivamente hasta llegar a la conclusión q. Hay que hacer notar que en el razonamiento generalmente se incluyen otros elementos que aun cuando no forman parte del enunciado, son axiomas, definiciones o proposiciones que ya han sido demostradas como verdaderas.

Cuando se quiere demostrar que "si *p* es verdadera entonces *q* también los es", *no se está suponiendo* que *p* es verdadera siempre, lo que se quiere demostrar es que *cuando p es verdadera, entonces q también lo es*.

Otro elemento que hay que hacer notar es que muchas de las demostraciones que se efectúan en Geometría, se realizan haciendo alguna o algunas construcciones auxiliares.

La demostración del siguiente teorema está realizada por el método directo.

Teorema 1.4.1

Los ángulos en la base de un triángulo isósceles ABC son iguales.

Antes que nada, se puede reformular el enunciado del teorema como: Si *un triángulo es isósceles* entonces *los ángulos adyacentes a su base son iguales* donde la proposición *p* es *un triángulo es isósceles* y *q* es *los ángulos adyacentes a su base son iguales*.

Para interpretar adecuadamente la proposición, recuerde que por definición un triángulo es isósceles si tiene dos lados iguales y se acostumbra designar como base del triángulo isósceles al lado desigual.

Demostración:

Sea ΔABC un triángulo isósceles (hipótesis). Esto es, $AB = AC$ (por la definición de triángulo isósceles). Llamemos α, β y γ α sus ángulos.

Se quiere demostrar que los ángulos en la base son iguales, β y γ en el caso de la figura 1.17. La demostración que se presenta es la realizada por Euclides.

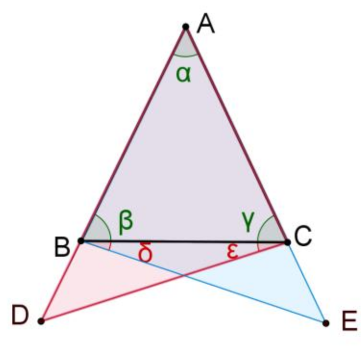


Figura 1.17

Construcción auxiliar: Se prolonga la recta *AB* y se escoge un punto *D* (postulado 2). Se prolonga *AC* (postulado 2). Sea *E* un punto en la prolongación de *AC* tal que $CE = BD$ (proposición 2). Se consideran los ΔADC y ΔAEB.

AD = *AE*, ya que *AB* = *AC* y *CE* = *BD* (noción común 2),

AC = *AB*, por hipótesis, y α es común a los dos triángulos.

Por lo tanto, se tiene que Δ*ADC* ≅ Δ*AEB*, por el primer criterio de congruencia de triángulos (LAL), entonces, *BE* = *DC*, $< ABE =< ACD$ y $< BEA =< CDA$.

Ahora bien, considérense Δ*BDC* y Δ*CEB*,

AD = *AE*, ya que *AB* = *AC* y *CE* = *BD* (noción común 2),

DC = *EB*, por la demostración anterior,

BC es común a los dos triángulos.

Por lo tanto, se tiene que Δ*BDC* ≅ Δ*CEB*, por el segundo criterio de congruencia (LLL), entonces, $< CBD =< BCE$, $< BDC =< CEB$ y $\varepsilon =< DCB =< EBC = \delta$.

Ya que $< ABE =< ACD$ y $\delta = \varepsilon$, entonces $\beta = \gamma$, (noción común 3), como se quería demostrar.

Como se puede observar, la estructura de la demostración consistió en probar que:

1. "*si* un triángulo *ABC* es isósceles y se prolongan los dos lados iguales con segmentos iguales *entonces* se forman dos triángulos con dos lados y el ángulo entre ellos iguales",
2. "*si* dos triángulos tienen dos lados y el ángulo entre ellos iguales *entonces* son congruentes",
3. "si dos triángulos son congruentes *entonces* todos sus ángulos y lados correspondientes son iguales",
4. "*si* dos triángulos tienen sus tres lados iguales *entonces* son congruentes".
5. "si dos triángulos son congruentes *entonces* todos sus ángulos correspondientes son iguales",

Observe que la primera de estas proposiciones es derivada de la construcción realizada, la cual se puede realizar en vista de resultados anteriores (postulado 2 y proposición 2 de Euclides). La segunda de estas proposiciones es uno de los resultados que se ha considerado como axioma, la tercera y la quinta son la definición de triángulos congruentes y finalmente la cuarta es nuevamente una proposición considerada como axioma. Esto es, definiciones, axiomas y proposiciones ya demostradas como verdaderas también pueden considerarse parte de la hipótesis de este teorema.

Además, la demostración que se ha efectuado hace referencia a la figura que se ha construido. Si se revisan las demostraciones de los Elementos, es claro que el uso de las figuras es una parte esencial de las demostraciones. Hay que tener cuidado de que las figuras que apoyan las demostraciones no tengan ningún elemento que las haga perder generalidad.

En este último caso, hay que garantizar que efectivamente se consideró un triángulo isósceles cualquiera y que la demostración realizada no depende de alguna característica especial de la figura, excepto el hecho de que el triángulo es isósceles, para que sea aplicable a todos los triángulos isósceles.

Asimismo, hay que observar que la figura no sustituye la demostración, es un elemento de apoyo para la misma.

Como ya hemos dicho, para realizar las demostraciones geométricas, muy a menudo se realizan una o varias construcciones auxiliares. En esto radica una de sus dificultades. La realización de estas construcciones no responde a ocurrencias, sino, por un lado, a un conocimiento bastante detallado de la figura geométrica con la que se está trabajando y por otro, al de los axiomas y teoremas demostrados con anterioridad, en los cuáles se puede apoyar la demostración. Al respecto, podemos citar (Torres, 2004):

> "Cuando una teoría se organiza deductivamente (método axiomático), el ideal es que la demostración sea la única condición de ingreso a la misma. No obstante, aun cuando esta condición se satisfaga plenamente, aquello que se demuestra debe conocerse –o al menos conjeturarse- de antemano. No debemos olvidar que la axiomática no es en sí un método de descubrimiento, sino una forma de presentar los hechos conocidos. Así sucede en la práctica matemática, donde lo que se prueba en una teoría axiomática primero se descubre mediante la observación, la experimentación, la generalización y uno que otro chispazo divino. En esto, las figuras y los diagramas ocupan un lugar de privilegio".

Actividad 7

1. Construye la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:
   a) $p \wedge q$.
   b) $p \vee q$.
   c) $\neg p$
   d) $\neg(\neg p)$. ¿Qué puedes decir de los valores de verdad de p y $\neg(\neg p)$?
   e) $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$.
2. Compara las tablas de verdad de $p \Rightarrow q$ y $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$. ¿Qué puedes decir de sus valores de verdad?

3. Demuestre por el método directo:

a) En un triángulo isósceles la mediana, la altura y la bisectriz correspondientes a la base del triángulo coinciden.

b) Si dos ángulos de un triángulo son iguales, entonces los lados opuestos a esos ángulos son también iguales

1.5 Teorema de Pitágoras

El *Teorema de Pitágoras* es de las relaciones matemáticas más conocidas y que más demostraciones han recibido. Este teorema aparece a menudo en la Matemática. Es la base de multitud de demostraciones de Geometría y de Trigonometría, en particular.

Como se mencionó en la introducción, los babilonios y los egipcios tenían conocimiento de este teorema. También fue conocido en China en la antigüedad. No se conoce que haya habido relación alguna entre Mesopotamia y China en esta época por lo que se presume que fue un descubrimiento independiente en ambas culturas. Este teorema es la aportación fundamental del texto matemático más antiguo en China, el Chou Pei Suang Chin, un tratado de cálculos astronómicos que incluye algunos resultados sobre el triángulo rectángulo y sobre el uso de fracciones. No se sabe con certeza la época en que fue escrito ya que diversos autores lo sitúan desde alrededor del año 1000 hasta alrededor del año 300 a.n.e.

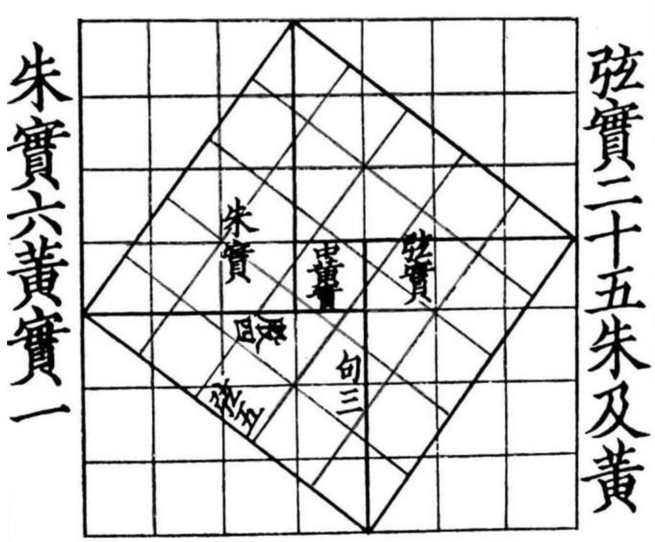


Ilustración 1.5

El Diagrama de la hipotenusa **del tratado Chino** ***Chou-Pei Suan-Ching ilustra***
una prueba del ***Teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5.***

Aun cuando el diagrama ilustra el caso de lados 3, 4 y 5, ha servido de base para la demostración que se presenta a continuación.

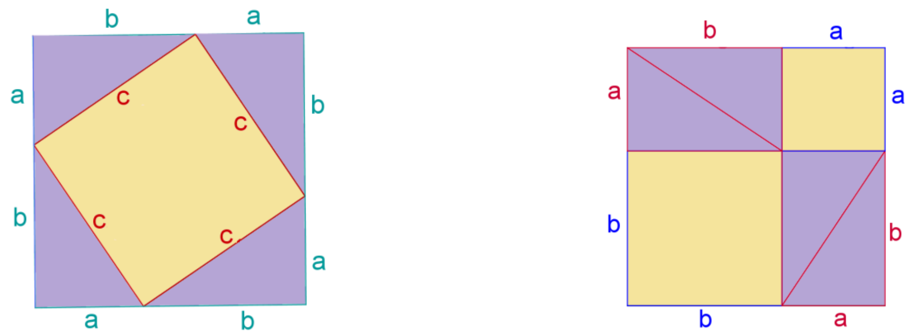


Figura 1.18

Considérese un triángulo rectángulo de catetos *a*, *b* y de hipotenusa *c*. Se construye un cuadrado de lado *a* + *b*. Por un lado, se divide el cuadrado de lado *a* + *b*, en un cuadrado de lado *c* y cuatro triángulos rectángulos congruentes al triángulo dado. Como se ilustra en el cuadrado de la izquierda en la figura 1.18. Entonces se puede calcular el área del cuadrado *K* como:

K = *Área del cuadrado de lado c* + 4 (*Área del triángulo de lados a, b, c*).
(Postulado 4, b)

Por otro lado, se divide el cuadrado de lado *a* + *b* en dos cuadrados uno de lado *a*, otro de lado *b* y dos rectángulos de lados *a* y *b*, como se ilustra en el cuadrado de la derecha en la figura 1.18. Se tiene entonces que:

K = Área del cuadrado de lado a + Área del cuadrado de lado b + 4(Área del triángulo de lados a, b, c).

De donde, *Área del cuadrado de lado a + Área del cuadrado de lado b = Área del cuadrado de lado c*, como se quería demostrar.

Se ha demostrado el teorema de Pitágoras: *la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado construido sobre la hipotenusa.*

Corolario 1: Si dos triángulos rectángulos tienen respectivamente iguales un cateto y la hipotenusa son congruentes.

Corolario 2: Desde un punto O fuera de una recta m, la perpendicular es la más corta de las rectas que pueden trazarse de O a m.

Actividad 8

Demuestre:

1. Los corolarios 1 y 2 de la sección anterior.
2. En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos

menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él y que el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Se llama proyección de un punto sobre una recta al pie de la perpendicular trazada desde el punto a la recta. Se entiende por proyección de un segmento sobre una recta al segmento formado por las proyecciones de sus puntos sobre la recta

Actividad 9

Se llama lugar geométrico al conjunto de puntos que satisface una propiedad tal que sólo estos puntos del plano la satisfacen. Esto es, un punto está en el lugar geométrico si satisface la propiedad enunciada y si un punto satisface la propiedad enunciada entonces está en el lugar geométrico.

Muchas de las figuras que conocemos pueden describirse como lugares geométricos. Por ejemplo, el círculo es el lugar geométrico de los puntos en el plano que equidistan de un punto fijo llamado centro, la elipse es el lugar geométrico de los puntos en el plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es igual a un valor dado, etc.

Dada la definición de lugar geométrico, lo que se quiere demostrar es que, si *p* es la condición de ser alguna figura geométrica definida previamente y *q* la de pertenecer al lugar geométrico, entonces se tiene $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$. Esto es, siempre que *p* es verdadera entonces *q* es verdadera y siempre que *q* es verdadera entonces *p* es verdadera.

Demuestre que:

1. La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.
2. La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo. Recuerda que la distancia de un punto a una recta se mide perpendicularmente.

Encuentre el lugar geométrico:

3. Del tercer vértice de un triángulo que tiene los otros dos vértices fijos y el área dada.
4. De uno de los extremos de un segmento de recta de longitud dada *p,* si se mueve de tal forma que permanece paralelo a una recta dada *m* y el otro extremo se mueve sobre una circunferencia dada.

1.6 Más sobre las demostraciones

1.6.1 Demostración por contradicción

Un método bastante utilizado cuando se quiere demostrar $p \Rightarrow q$, es el llamado método por contradicción o reducción al absurdo. En una demostración por contradicción se supone que la proposición *p* es verdadera y que *q* es falsa, esto es que ¬*q* es verdadera, y de estas hipótesis se deduce que para alguna proposición *r*, se tiene que *r* y ¬*r* son verdaderas. Una proposición y su negación no pueden ser las dos verdaderas, por el principio lógico de no contradicción, por lo que lógicamente esto es equivalente a demostrar que *q* es verdadera.

El hecho de que una proposición *q* es lógicamente equivalente a la proposición $\neg q \Longrightarrow (r \wedge \neg r)$ se establece a través de la coincidencia de sus valores de verdad, lo que sustenta el método de demostración por contradicción.

q	***r***	**¬*q***	**¬*r***	$\boldsymbol{r \wedge \neg r}$	$\boldsymbol{\neg q \Longrightarrow (r \wedge \neg r)}$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

Tabla 1.2

Se presenta ahora una demostración por contradicción.

Teorema 1.6.1

Dados una recta m y un punto P cualquiera en el plano, existe una única recta perpendicular a la recta m y que pasa por P.

En esta demostración las proposiciones *p* y *q* son,

p: si *m* es una recta cualquiera y *P* un punto cualquiera fuera de *m*

q: la perpendicular a *m* por *P* es única

Se quiere demostrar *p* ⇒ *q*, por lo que se supone *p* como verdadera y ¬*q* también como verdadera, para utilizar el método por contradicción.

¬*q*: la perpendicular a *m* por *P* no es única.

Se verá cómo se utilizan en la siguiente demostración.

Demostración:

Sea *PD* perpendicular a la recta *m* (Actividad 5, 3). Supongamos que existe *B* un punto en *m* distinto de *D*, tal que *PB* es otra perpendicular a *m*. Sea α_I el ángulo recto formado por *PD* y *m*, sea β_I el ángulo recto formado por *PB* y *m*.

Prolongamos el segmento *PD* del otro lado de *m* (Construcción auxiliar, Postulado 2) y encontramos el punto *Q* tal que *PD* = *QD* (Proposición 2). Por construcción *P*, *D* y *Q* son colineales, y $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ recto. Se traza el segmento *QB*. De donde,

PD = *QD*, por construcción,

DB es lado común, por lo tanto,

Δ*PDB* ≅ Δ*QDB* por el criterio de congruencia LAL, y se tiene entonces que $\beta_1 = \beta_2$. Como β_1 es recto, entonces $\beta_1 + \beta_2$ = dos rectos y los puntos *P*, *B* y *Q* están alineados (Proposición 14), lo cual es una contradicción ya que, tendríamos 2 rectas diferentes por los dos puntos *P* y *Q,* que es la negación del postulado 1. Por lo tanto β_1 no puede ser recto para ningún punto diferente a *D* en *m*, por lo que la perpendicular desde un punto a una recta es única.

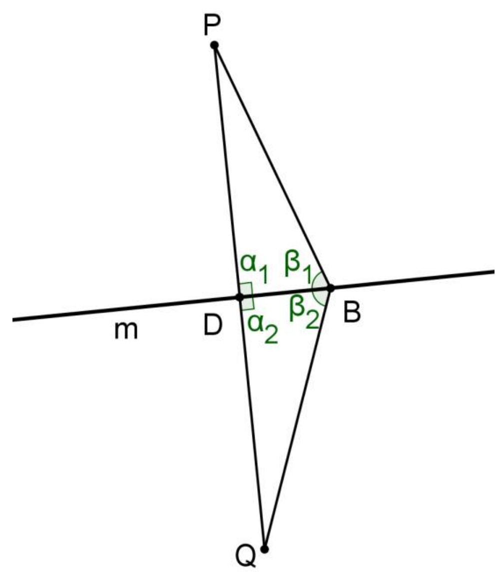


Figura 1.19

Finalmente se dedujo ¬*r* donde,

r: Dados dos puntos *P* y *Q* en el plano la recta que los une es única

¬*r*: Dados dos puntos *P* y *Q* en el plano la recta que los une no es única

Como se puede observar, *r* resultó ser el postulado 1, algo que no era claro cuando se inició la demostración.

Actividad 10

El Quinto postulado de Euclides fue motivo de discusión desde la época de Ptolomeo (siglo II) hasta el siglo XIX en que surgieron las geometrías no euclidianas.

Proclo escribió con referencia al Quinto Postulado: *"Debe ser borrado por completo de los postulados porque se trata de un teorema que envuelve muchas dudas, el cual se propuso resolver Ptolomeo, pero su demostración requiere de muchas definiciones y teoremas".*

Como se puede observar, desde un inicio se consideró que este postulado no era tan evidente como los otros e incluso durante largo tiempo se consideró la posibilidad de que fuera consecuencia de ellos. Esta percepción fue reforzada por el hecho de que Euclides no hizo uso de este postulado en las primeras 28 proposiciones del libro I y de que la proposición 17 del mismo libro es su inverso y por tanto se demostró sin usar el Quinto Postulado.

1. Demuestre que el quinto postulado implica:
    a) Dada una recta *m* y un punto *P* que no esté en *m,* existe una única recta paralela a *m* que pasa por *P* (Axioma de Playfair).
    b) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos (Legendre).
    c) Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.
    d) Si una recta *m* es perpendicular a otra recta *n,* es también perpendicular a cualquier paralela a *n.*
    e) Dos rectas paralelas son equidistantes.
2. Indica qué método de demostración utilizaste en cada caso.

Actividad 11

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados. Los tipos de cuadriláteros son variados y dependen de si sus lados son o no paralelos, tienen o no la misma longitud y son o no perpendiculares entre sí.

Un *paralelogramo* es por definición un *cuadrilátero* en el que sus *lados opuestos son paralelos*.

Se llama *trapecio* al cuadrilátero que tiene solamente un par de lados paralelos.

Se llama *rectángulo* al cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos.

Se llama *rombo* al cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales.

Se llama *cuadrado* al cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos y sus lados iguales.

Demuestre:

1. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero cualquiera es igual a cuatro rectos.
2. Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.
3. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.
4. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.
5. Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

6. Escriba los teoremas anteriores en la forma si *p entonces q*, indicando que proposición es *p* y cuál *q*.
7. Indique si alguno de los teoremas anteriores se tiene que "si *p entonces q*" es verdadera, pero la proposición "si *q entonces p*" es falsa.
8. Las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.

1.6.2 Demostración por contrarrecíproca o contrapositiva

La demostración por la contrarrecíproca también llamada contrapositiva, al igual que la demostración directa, se usa también para demostrar proposiciones de la forma condicional $p \Rightarrow q$. Esta forma se basa en el hecho de que $p \Rightarrow q$ es lógicamente equivalente a $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

Si se construye la tabla de verdad de $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ o bien $\neg q \Rightarrow \neg p$ se tiene que, para los diferentes valores de verdad de p y q, los valores de verdad de las proposiciones compuestas $p \Rightarrow q$ (Tabla 1.1) y $\neg q \Rightarrow \neg p$ son los mismos; entonces las dos proposiciones son equivalentes.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	*V*	*F*	*F*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*V*
F	*F*	*V*	*V*	*V*

Tabla 1.3

Esto es, cada vez que se tiene una proposición condicional, en lugar de demostrarla directamente se puede demostrar su contrapositiva que es equivalente.

Se demostrará el siguiente teorema usando la proposición contrapositiva.

Teorema 1.6.2

Si un cuadrilátero no tiene ángulos obtusos entonces es un rectángulo.

p: si un cuadrilátero no tiene ángulos obtusos.

q: el cuadrilátero es un rectángulo.

$p \Rightarrow q$: si un cuadrilátero no tiene ángulos obtusos entonces es un rectángulo.

Para construir la contrapositiva hay que construir $\neg q$ y $\neg p$.

$\neg q$: el cuadrilátero no es un rectángulo.

Para construir $\neg p$, observe que implica una doble negación: no es verdadero que el cuadrilátero no tiene ángulos obtusos. Se tiene que, p es $\neg s$, para s: el cuadrilátero tiene ángulos obtusos.

Pero, la doble negación de una proposición s, $(\neg(\neg s))$ es lógicamente equivalente a s, como se puede observar de la tabla de los valores de verdad (Actividad 7, 1d).

Por lo tanto, ya que p es $\neg s$, se tiene que $\neg p$ es $(\neg(\neg s))$, o sea s. Así,

$\neg p$: *el cuadrilátero tiene ángulos obtusos*.

Por tanto, se tiene que,

$\neg q \Rightarrow \neg p$: *si un cuadrilátero no es un rectángulo entonces tiene ángulos obtusos.*

Antes de iniciar la demostración observe que la proposición p, *el cuadrilátero no tiene ángulos obtusos,* puede también escribirse como *el cuadrilátero no tiene ningún ángulo obtuso* y la proposición $\neg p$ como *el cuadrilátero tiene algún ángulo obtuso*. Esto es,

$\neg q \Rightarrow \neg p$: *si un cuadrilátero no es un rectángulo entonces tiene algún ángulo obtuso.*

Demostración:

Partimos entonces de que un cuadrilátero *ABCD* cualquiera no es un rectángulo, esto quiere decir que al menos uno de sus ángulos, llamémosle α, no es recto, esto es, α es obtuso o es agudo. Si α es obtuso, ya acabamos; si α es agudo, entonces el cuadrilátero *ABCD* tiene al menos un ángulo β que es obtuso, ya que de lo contrario la suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero *ABCD* sería menor de cuatro rectos.

Como se puede observar, la estructura de la demostración consistió en probar que:

1. "*si ABCD* es un cuadrilátero que no es rectángulo *entonces* tiene un ángulo que no es recto", por la definición de rectángulo.
2. "*si ABCD* es un cuadrilátero que tiene un ángulo que no es recto *entonces* ese ángulo es obtuso o es agudo", por el principio de tricotomía.
3. ""*si ABCD* es un cuadrilátero *entonces* la suma de sus ángulos interiores es cuatro rectos", actividad 11, 1.
4. "*si ABCD* es un cuadrilátero que tiene un ángulo agudo *entonces* tiene otro ángulo que es obtuso", derivado de 3.

1.6.3 Demostración de bicondicionales

Dada una proposición $p \Rightarrow q$, a la proposición $q \Rightarrow p$ se le denomina como su recíproca. La proposición $p \Rightarrow q$ no es lo misma que $q \Rightarrow p$, pues tienen distinto significado, en consecuencia, pueden tener valores de verdad diferentes.

Por ejemplo, si $p \Rightarrow q$ es la proposición *si un cuadrilátero es un rectángulo entonces sus ángulos opuestos son iguales*, entonces $q \Rightarrow p$ es la proposición *si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son iguales entonces es un rectángulo*. En este caso $p \Rightarrow q$ es verdadera y $q \Rightarrow p$ no lo es. Pero si $p \Rightarrow q$ es la proposición *si un cuadrilátero no tiene ángulos obtusos entonces es un rectángulo*, la proposición $q \Rightarrow p$ es s*i un cuadrilátero es un rectángulo entonces no tiene ángulos obtusos*. En este caso tanto $p \Rightarrow q$ como $q \Rightarrow p$ son verdaderas.

La proposición $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ es entonces $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$. Se usa el símbolo $\Leftrightarrow$ para expresar este significado que se expresa como "*p* si y solo si *q*". Una proposición de la forma $p \Leftrightarrow q$ se conoce como proposición bicondicional y de acuerdo con la tabla de verdad siguiente, es verdadera solamente cuando las dos proposiciones $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$ son verdaderas. Se tiene además que las dos proposiciones son equivalentes.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ $p \Leftrightarrow q$
V	*V*	*V*	V	V
V	*F*	*F*	V	F
F	*V*	*V*	F	F
F	*F*	*V*	V	V

Tabla 1.4

Por tanto, para demostrar que una proposición bicondicional es verdadera hay que demostrar que las dos condicionales son verdaderas usando cualquiera de los métodos ya revisados: directo, por contrapositiva o por contradicción.

Actividad 12

Demuestre las siguientes proposiciones bicondicionales; puede usar los resultados de la Actividad 11.

1. Un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si sus diagonales se bisecan mutuamente.
2. Un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si sus lados opuestos son iguales.

3. Un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si sus ángulos opuestos son iguales.
4. Un cuadrilátero es un rectángulo si y sólo si sus diagonales se bisecan y son iguales.
5. Un cuadrilátero es un rombo si y sólo si sus diagonales se bisecan y son perpendiculares.

1.7 El Teorema de Tales y la semejanza de triángulos

En matemáticas el concepto de semejanza está muy ligado al concepto de proporcionalidad y ha tenido históricamente un gran número de aplicaciones. Los mapas, por ejemplo, son representaciones a escala de una porción de una ciudad, un país, esto es, imágenes proporcionales; se construyen modelos a escala (proporcionales) de edificios, circuitos electrónicos, etc., con la finalidad de hacer algunas evaluaciones antes de iniciar sus procesos constructivos.

Al igual que el concepto de congruencia, este concepto fue trabajado ya por los griegos, e igualmente, sus propiedades tienen gran utilidad para un sinnúmero de demostraciones geométricas. Como ya se ha dicho, entre el conocimiento geométrico que se atribuye a los Pitagóricos está el desarrollo de una teoría de las proporciones, aunque limitada a segmentos conmensurables. Los libros V y VI de Euclides abordan los temas de proporcionalidad y polígonos semejantes, respectivamente, en los cuales se dice que retomó la teoría de las proporciones de Eudoxio.

Si se piensa la relación de semejanza como una relación en la que una de las figuras está a escala de la otra, se puede decir que para que dos polígonos que tienen el mismo número de lados sean semejantes, es necesario que tengan sus lados proporcionales, pero esto no es suficiente; por ejemplo, si se tiene un cuadrado cuyos lados sean del doble de los lados de un rombo:

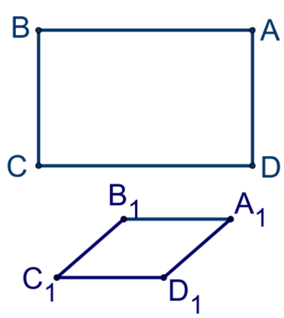


Figura 1.20

Estos dos cuadriláteros tienen el mismo número de lados y sus lados están en la misma proporción:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1} = 2,$$

sin embargo, queda claro que las figuras no tienen la misma forma y por tanto no coinciden con lo que identificamos como figuras a escala.

¿Qué característica los hace diferentes? Como ya se vio en la sección de congruencia, el que tengan la misma forma depende también de la igualdad de sus ángulos, en este caso, los ángulos del cuadrado son rectos y los del rombo no.

Se puede formalizar el concepto de semejanza de figuras diciendo que *dos figuras que tienen el mismo número de lados son semejantes si tienen sus lados correspondientes proporcionales y sus ángulos correspondientes iguales. Si dos triángulos ABC y* $A_1B_1C_1$ *son semejantes, se denota como,* $\Delta ABC \approx \Delta A_1B_1C_1$.

Es conveniente reflexionar sobre el significado de la proporcionalidad de los lados de dos figuras.

Supóngase que se tienen dos triángulos semejantes, ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$, entonces sus lados correspondientes son proporcionales; esto es,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k \quad .$$

La constante *k* recibe el nombre de constante de proporcionalidad. Estas igualdades son equivalentes a las siguientes ecuaciones:

$$AB = k\, A_1B_1,\; BC = k\, B_1C_1,\; CA = k\, C_1A_1.$$

Es decir, la constante *k* es el número por el que hay que multiplicar la longitud de los lados del triángulo $A_1B_1C_1$ para obtener la longitud de los lados del triángulo *ABC*. Pero, estas ecuaciones son equivalentes a las siguientes:

$$A_1B_1 = \frac{1}{k}\, AB,\; B_1C_1 = \frac{1}{k}\, BC,\; C_1A_1 = \frac{1}{k}\, CA.$$

Es decir, la constante $\frac{1}{k}$, el inverso de *k*, es el número por el que hay que multiplicar la longitud de los lados del triángulo *ABC* para obtener la longitud de los lados del triángulo $A_1B_1C_1$. Esto es, las constantes *k* o $\frac{1}{k}$, indican la escala a que está una figura con respecto de la otra.

En el caso de la semejanza de triángulos, la definición implica que para que dos triángulos sean semejantes se requiere la igualdad de sus tres ángulos y la proporcionalidad de sus tres lados. Sin embargo, al igual que en el caso de congruencia de triángulos, para determinar la semejanza de dos triángulos se requiere solamente de tres elementos, por supuesto no cualesquiera tres.

Antes de enunciar los tres teoremas de semejanza, se revisarán dos resultados que nos serán de utilidad para la demostración de los mismos.

Teorema 1.7.1 (Teorema de Tales)

Una recta que corta dos de los lados de un triángulo es paralela al tercer lado si y sólo si los divide proporcionalmente.

Este teorema es la proposición 2 del libro VI de Euclides y la demostración a continuación está basada en la de ese texto.

Demostración:

Sea *ABC* un triángulo y *m* una recta paralela a *BC* que corta a los lados *AB* y *AC* en los puntos B_1 y C_1 respectivamente.

Se demostrará primero que:

$$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} \ .$$

Para ello se va a comparar el área de algunos triángulos, por lo que se trazan los segmentos BC_1 y CB_1 (Postulado 1), la perpendicular a la recta *AB* desde C_1, donde H_1 es el pie de esta perpendicular y la perpendicular a la recta *AC* desde B_1 donde H_2 es el pie de esta perpendicular.

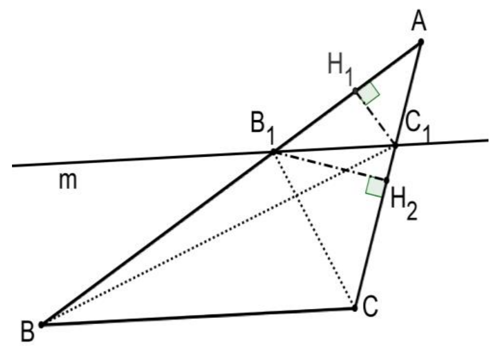


Figura 1.21

Se consideran los triángulos AB_1C_1 y BB_1C_1; si se llama K_1 al área del ΔAB_1C_1 y K_2 al área del ΔBB_1C_1 se tiene que:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{AB_1}{B_1B} \,,$$

ya que por construcción C_1H_1 es altura tanto de ΔAB_1C_1 como del ΔBB_1C_1 y sus bases son AB_1 y B_1B, respectivamente (axioma 3, d).

Se consideran ahora los triángulos AB_1C_1 y CB_1C_1, si se llama K_3 al área del ΔCB_1C_1 se tiene que:

$$\frac{K_1}{K_3} = \frac{AC_1}{C_1C} \,,$$

ya que, por construcción B_1H_2 es altura tanto de ΔAB_1C_1 como del ΔCB_1C_1 y sus bases son AC_1 y C_1C, respectivamente (axioma 3, e).

Pero, $K_2 = K_3$, ya que los triángulos BB_1C_1 y CB_1C_1 tienen la misma base, B_1C_1, y están contenidos entre paralelas. Luego, $\frac{K_1}{K_2} = \frac{K_1}{K_3}$, de donde, $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$, como se quería demostrar.

Se verá ahora que las igualdades $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ y $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$ son equivalentes. Supongamos que $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$, se tiene entonces,

$$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} \Rightarrow \frac{B_1B}{AB_1} = \frac{C_1C}{AC_1} \Rightarrow \frac{B_1B}{AB_1} = \frac{C_1C}{AC_1} \Rightarrow \frac{B_1B}{AB_1} + 1 = \frac{C_1C}{AC_1} + 1,$$

de donde, $\frac{B_1B + AB_1}{AB_1} = \frac{C_1C + AC_1}{AC_1}$,

pero, $B_1B + AB_1 = AB_1 + B_1B = AB$ y $C_1C + AC_1 = AC_1 + C_1C = AC$, de donde,

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1} \Rightarrow \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} .$$

Se puede observar que todas implicaciones involucradas en esta demostración son reversibles, por lo que efectivamente las dos igualdades son equivalentes.

Ahora se demostrará el recíproco del Teorema de Tales:

Teorema 1.7.2

Si una recta corta a dos de los lados de un triángulo proporcionalmente, entonces es paralela al tercer lado.

Demostración:

Sea ABC un triángulo y m una recta tal que corta a los lados AB y AC en los puntos B_1 y C_1 respectivamente en la misma proporción, esto es:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} .$$

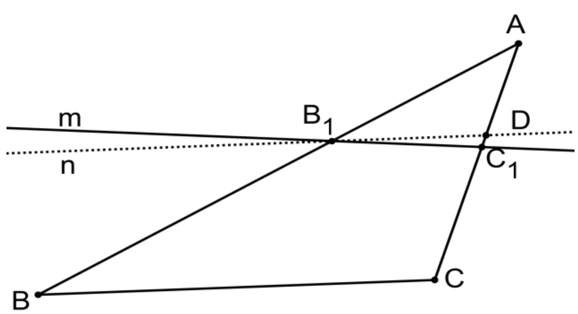


Figura 1.22

Si se supone que la recta m no es paralela al lado BC, entonces se puede trazar la recta n paralela a BC que pasa por B_1. Ya que n corta a AB, se tiene por el axioma de Pasch que corta a BC o a AC, pero como es paralela a BC, corta necesariamente a AC. Sea D el punto de intersección de n con AC.

Por el Teorema 1.1, se tiene que:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AD}{AC} ,$$

por lo tanto, $\frac{AC_1}{AC} = \frac{AD}{AC}$, de donde $AC_1 = AD$ y se tiene que el punto D coincide con el punto C_1. Esto es, si m no es paralela a BC, las rectas m y n, que son distintas, tendrían dos puntos en común, lo que contradice el primer postulado.

Por tanto, *m* es paralela a *BC*. De los teoremas *1.1* y *1.2* se obtiene, entonces, el siguiente resultado:

Teorema de Tales. *Una recta que corta a dos de los lados de un triángulo es paralela al tercer lado si y sólo si divide a esos dos lados proporcionalmente.*

Este resultado como su nombre lo indica se atribuye a Tales de Mileto, a quien como ya se ha dicho, se le atribuye el cálculo de la altura de las pirámides de Egipto, utilizando la semejanza de triángulos.

Teorema 1.7.3

Si dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales, entonces son semejantes; esto es, tienen sus lados proporcionales.

Demostración:

Sean ΔABC con ángulos interiores α, β y γ y $\Delta A_1B_1C_1$ con ángulos interiores α_1, β_1 y γ_1 tales que:

$$\alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1,\ \gamma = \gamma_1.$$

Para demostrar que los dos triángulos son semejantes, se demostrará que sus lados son proporcionales; esto es, se demostrará:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}\ .$$

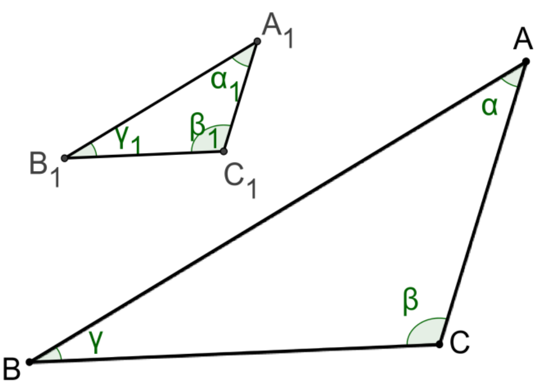


Figura 1.23

Para ello, se construyen B_2 y C_2 sobre los lados *AB* y *AC* respectivamente, tales que $AB_2 = A_1B_1$ y $AC_2 = A_1C_1$.

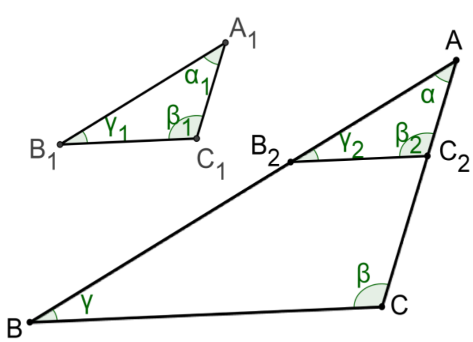


Figura 1.24

Como además $\alpha = \alpha_1$, se tiene que $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta AB_2C_2$ (LAL), de donde:

$$\beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2 \text{ y } B_1C_1 = B_2C_2.$$

Entonces, de la hipótesis y estas igualdades se obtiene que:

$$\beta = \beta_2,\ \gamma = \gamma_2,$$

y por tanto la recta B_2C_2 es paralela a *BC* (axioma 2, b), y por el teorema de Tales:

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}\ .$$

y ya que $AB_2 = A_1B_1$ y $AC_2 = A_1C_1$, se tiene que:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Para demostrar la proporcionalidad del tercer lado se construye, de manera análoga, otro triángulo congruente al $\Delta A_1B_1C_1$, pero ahora con vértice en B o en C.

Supóngase que se han seleccionado los puntos A_3 y C_3 sobre los lados BA y BC respectivamente, tales que $BA_3 = B_1A_1$ y $BC_3 = B_1C_1$.

Procediendo de manera análoga al caso anterior, se demuestra que:

$$\Delta B_1C_1A_1 \cong \Delta BC_3A_3,$$

de donde:

$$\beta_1 = \beta_3,\ \alpha_1 = \alpha_3 \ \text{ y } \ A_1C_1 = A_3C_3.$$

Entonces, la recta A_3C_3 es paralela a AC, y se tiene que:

$$\frac{BA}{BA_3} = \frac{BC}{BC_3},$$

y ya que $BA_3 = B_1A_1$ y $BC_3 = B_1C_1$, se tiene que

$$\frac{BA}{B_1A_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

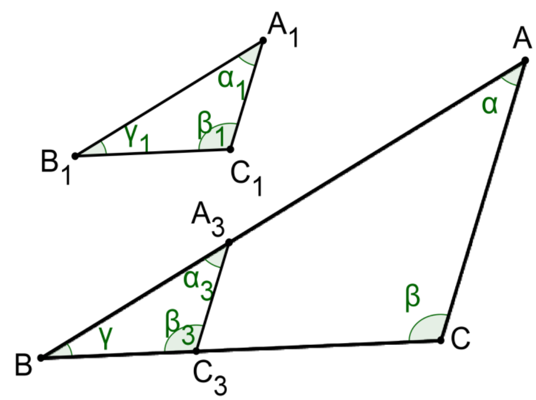


Figura 1.25

Observe que, dado que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a dos ángulos rectos (Actividad 10, 2), basta con que dos de sus ángulos sean respectivamente iguales para que los triángulos sean semejantes.

Los otros dos teoremas de semejanza se enuncian a continuación y su demostración se deja como ejercicio al lector.

Teorema 1.7.4

Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los dos lados adyacentes a éste proporcionales, entonces son semejantes; esto es, tienen sus otros dos ángulos respectivamente iguales respectivamente y el tercer lado está en la misma proporción.

Teorema 1.7.5

Si dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales, entonces son semejantes; esto es, tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.

Actividad 13

Haga una figura que ilustre la siguiente situación y demuestre.

Para todo ΔABC y para cualesquiera puntos P y Q en los lados AB y CA del triángulo respectivamente, tales que la recta PQ es paralela a BC, se tiene que las rectas BQ y CP se cortan sobre la mediana desde el punto A.

Actividad 14

Realice las siguientes construcciones:

1. Divida un segmento de recta AB, en n partes iguales.
2. Construya un triángulo semejante a un triángulo dado y que tenga un perímetro dado.

Actividad 15

Demuestre:

1. Dado un triángulo ABC y L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente, entonces los triángulos ABC y LMN son semejantes y LM es paralela a AB, MN a BC y NL a CA. Encuentre la razón de proporcionalidad entre ΔABC y ΔLMN.
2. El radio del circuncírculo de un ΔABC es el doble del radio del circuncírculo del triángulo ΔLMN, donde L, M y N son los puntos medios de los lados BC, CA y AB del triángulo.
3. Las alturas, medianas y mediatrices de dos triángulos semejantes están en la misma proporción que sus lados.
4. Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera, son vértices de un paralelogramo.
5. Dos triángulos rectángulos son semejantes si:
   a) Uno de sus ángulos agudos es igual.
   b) Sus catetos son proporcionales.
   c) La hipotenusa y un cateto son proporcionales.
6. El Teorema de Pitágoras usando los resultados de semejanza de triángulos.

Actividad 16

La siguiente es una demostración de que todos los triángulos son isósceles. En el inciso 1.1.4, se han construido triángulos no isósceles, por lo que la proposición "todos los triángulos son isósceles es falsa". ¿Dónde está el error de la demostración?

Demostración:

Sea *ABC* un triángulo cualquiera y sea *L* el punto medio del lado *BC*.

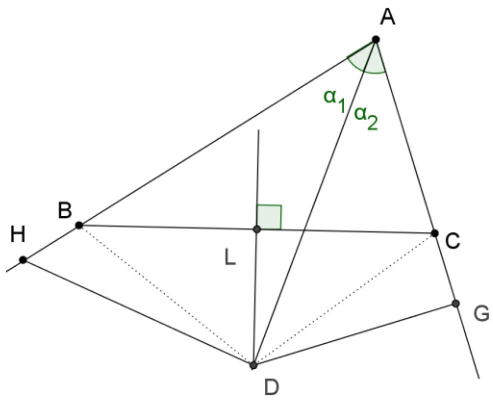


Figura 1.26

Se traza la bisectriz del $\angle A$. (Actividad 5, 2).

Se traza la mediatriz del segmento *BC*. (Actividad 5, 5).

Sea *D* la intersección de estas dos rectas. (V postulado).

Desde *D* se trazan las perpendiculares a *AB* y *AC*. Sean *H* y *G* los pies de estas perpendiculares, respectivamente. (Actividad 5, 3).

Los triángulos AHD y AGD son congruentes ya que:

$$\left.\begin{array}{c} los\ dos\ son\ triángulos\ rectángulos \\ tienen\ hipotenusa\ común\ AD \\ HD = GD, por\ estar\ D\ en\ la\ bisectriz\ del\ \angle A \end{array}\right\} \Longrightarrow AH = AG$$

(Actividad 8, 1)

Además, los triángulos *HBD* y *GCD* son congruentes ya que:

$$\left.\begin{array}{c} los\ dos\ son\ triángulos\ rectángulos \\ DB = DC,\ \ por\ estar\ D\ en\ la\ mediatriz\ de\ BC \\ HD = GD, por\ estar\ D\ en\ la\ bisectriz\ del\ \angle A \end{array}\right\} \Longrightarrow BH = CG$$

(Actividad 8, 1)

Por lo tanto, $AB = AH - BH = AG - CG = AC$ y el triángulo es isósceles.

Para buscar el error, puedes construir la figura en Geogebra y analizar los diferentes casos.

1.8 Algunas propiedades del triángulo

El triángulo es una de las figuras más estudiadas de la geometría elemental; esto se debe, indudablemente, a sus múltiples aplicaciones derivadas de la propiedad que tiene de ser "rígido". Esto es, si se construye un triángulo con tres varillas de longitud fija, aun cuando tratemos de moverlo, el triángulo se conserva rígido, sus ángulos quedan determinados de manera única. Si en vez de construir un triángulo, se construye en la misma forma un polígono, un cuadrilátero en este caso, se puede mover, ya que, dada la longitud de sus lados, la magnitud de sus ángulos no queda determinada de manera única.

Ilustración 1.6

A esta propiedad obedece que, para calcular el área o suma de los ángulos interiores de formas regulares e irregulares, se dividen en triángulos (se dice que se triangulan).

En esta sección se estudian algunas propiedades interesantes del triángulo.

Se considera conveniente utilizar notación estándar para trabajar. A los vértices de los triángulos los denotamos con letras mayúsculas *A*, *B* y *C*. Al triángulo se le denota como $\triangle ABC$. Los lados del triángulo se denotan como *AB*, *BC*, *CA* o con letras minúsculas *a, b* y *c*. En este último caso, se denota como *a* al lado opuesto al vértice *A*, como *b* al opuesto a *B* y como *c* al opuesto a *C*. A los puntos medios de los lados del triángulo como *L*, *M* y *N* y a los pies de las alturas como *D*, *E* y *F*. Se consideran los puntos *L* y *D* en el lado opuesto al vértice *A*; *M* y *E* en el opuesto al *B* y *N* y *F* en el opuesto a *C*.

Teorema 1.8.1

Las mediatrices de los lados de un triángulo, a las que se llama mediatrices del triángulo, son concurrentes en un punto llamado circuncentro. Este punto es el centro del círculo circunscrito al triángulo o circuncírculo.

Demostración:

Sea el $\triangle ABC$ y *L*, *M* y *N* los puntos medios de sus lados y sean ℓ y *m* las mediatrices por *L* y *M*, respectivamente.

Las rectas ℓ y *m* no son paralelas. ¿Por qué?

Sea *O* su punto de intersección. Por estar *O* en la mediatriz de *BC*, *OB* = *OC*, (Actividad 9, 1). Análogamente *OC* = *OA*, por lo tanto, *OA* = *OB* y *O* está en la mediatriz de *AB*. De donde, estas dos mediatrices del triángulo se intersecan en el punto *O*. Ya que *O* equidista de los tres vértices del triángulo, la circunferencia con centro en *O* y radio *OA*, pasa por los otros dos vértices.

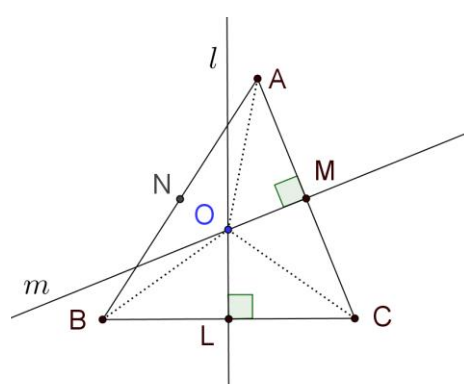


Figura 1.27

A esta circunferencia se le llama el circuncírculo o circunferencia circunscrita al triángulo.

Teorema 1.8.2

Las medianas de un triángulo son concurrentes en un punto llamado centroide o baricentro. El centroide triseca cada una de las medianas.

Demostración:

Sea *ABC* un triángulo y *AL y BM* dos de sus medianas. Por el V postulado, las dos medianas se intersecan. Sea *G* su punto de intersección.

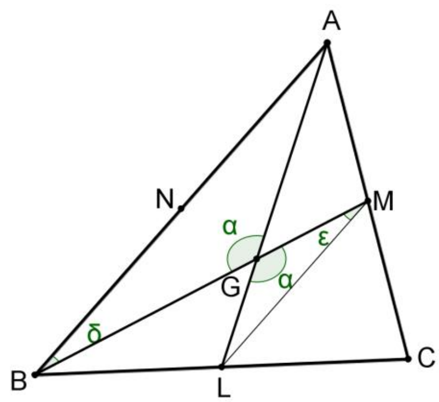


Figura 1.28

Se traza la recta *LM* que es paralela a *AB* y *AB* = 2*LM* (Actividad 15, 1); de donde, $\delta = \varepsilon$ (Axioma 2, c).

Por tanto, $\Delta ABG \approx \Delta LMG$, ya que tienen sus tres ángulos iguales (teorema 1.7.3); de donde, *AG* = 2*GL* y *BG* = 2*GM*. De forma análoga si se consideran las dos medianas *AL* y *CN*, éstas se intersecan en punto G_1, tal que $AG_1 = 2G_1L$ y $CG_1 = 2G_1N$.

Por tanto, $G = G_1$, y las tres medianas son concurrentes.

Se demostró, además, que *AG* = 2*GL*, *BG* = 2*GM* y *CG* = 2*GN*. Esto se expresa diciendo que el centroide triseca a cada una de las medianas.

Teorema 1.8.2

Las alturas de un triángulo son concurrentes en un punto llamado ortocentro.

Demostración:

Sea *ABC* un triángulo y *AD* la altura por el vértice *A*. Se traza por *A* una paralela a *BC*, por *B* una paralela a *AC* y por *C* una paralela a *AB*. Sea el triángulo *A′B′C′*, formado por esas paralelas. El cuadrilátero *ABCB′* es un paralelogramo, por tanto, *BC* = *AB′*. El cuadrilátero *BCAC′* también es un paralelogramo, de donde *BC* = *C′A*; por tanto, *C′A* = *AB′* y *AD* es mediatriz de *B′C′*.

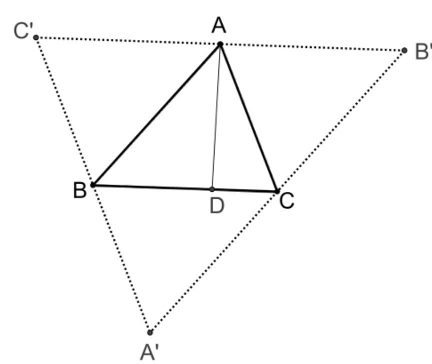


Figura 1.29

De manera análoga se demuestra que las alturas *BE* y *CF* del triángulo son mediatrices de los segmentos *C′A′* y *A′B′*, respectivamente. Por tanto, las alturas del ΔABC son mediatrices del $\Delta A'B'C'$ y por tanto son concurrentes.

Teorema 1.8.3

Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo son concurrentes en un punto llamado incentro. Este punto es el centro del círculo inscrito en el triángulo o incírculo.

Demostración:

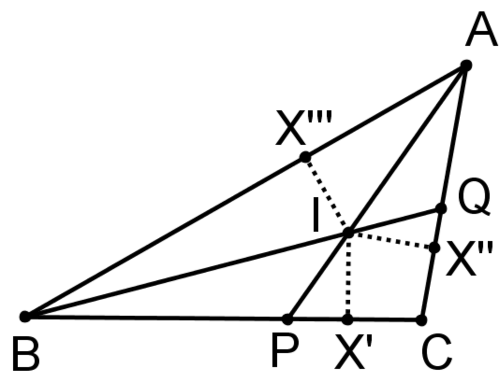


Figura 1.30

Sea el $\triangle ABC$ y AP y BQ las bisectrices de $\angle A$ y $\angle B$, respectivamente. Sean P y Q los pies de las bisectrices por $\angle A$ y $\angle B$, respectivamente. Las rectas AP y BQ se cortan en un punto I (V postulado). Sea I el punto de intersección de estas dos rectas. Se trazan perpendiculares a los lados del triángulo desde I. Sean X', X'' y X''' los pies de estas perpendiculares en BC, CA y AB respectivamente.

El punto I está en la bisectriz del $\angle B$ ⇨ $IX' = IX'''$ (Actividad 9,2); como también está en la bisectriz del $\angle A$ ⇨ $IX'' = IX'''$.

Por tanto, $IX' = IX''$ ⇨ I está en la bisectriz del $\angle C$, (Actividad 9, 2) y las tres bisectrices son concurrentes.

Ya que la distancia de I a los tres lados del triángulo es la misma, la circunferencia con centro en I y con radio igual a esta distancia, pasa por los tres puntos X', X'' y X''' y no corta a los lados del $\triangle ABC$ en ningún otro punto (corolario 2 del teorema de Pitágoras). Se dice entonces que la circunferencia es tangente a los lados del triángulo. A esta circunferencia se le llama el incírculo del triángulo.

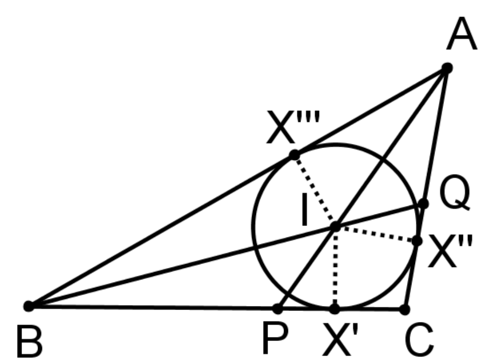


Figura 1.31

Teorema 1.8.4

Las bisectrices de dos de los ángulos exteriores y la del interior no adyacente de un triángulo concurren por tercias en tres puntos llamados excentros. Estos puntos son centro de círculos tangentes externamente a los lados del triángulo.

Demostración:

Se demostrará que dos bisectrices de los ángulos exteriores y la del interior no adyacente de un triángulo son concurrentes.

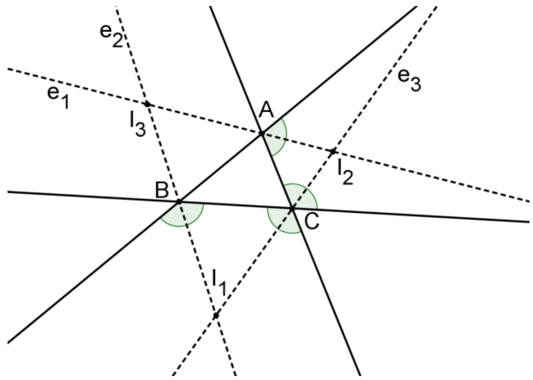


Figura 1.32

Sea el $\triangle ABC$. En la figura 1.32 se han trazado las prolongaciones de sus lados. Se trazan las bisectrices de los ángulos exteriores. Se llama e_1, e_2 y e_3 a las bisectrices exteriores por A, B y C respectivamente. En la misma figura se han marcado los ángulos exteriores. Estas rectas se intersecan por pares en I_1, I_2 e I_3.

Se analizará el caso de las bisectrices e_2 y e_3. Estas rectas son las bisectrices de los ángulos exteriores en los vértices B y C. La suma de estos dos ángulos es menor que cuatro rectos (¿por qué?). Por tanto, los ángulos que forman estas bisectrices con BC en el semiplano que determina BC y que no contiene al vértice A, es menor que dos rectos y por tanto se intersecan en ese semiplano (¿por qué?). Sea I_1 el punto de intersección. Pero análogamente se tiene que e_1 y e_3 se intersecan en el semiplano que determina AC y que no contiene a B. Por tanto, e_3 interseca a e_1 y e_2 en puntos diferentes, ya que uno en está en una de las semirrectas determinadas por C y el otro en la otra semirrecta. Sea entonces I_2 la intersección de e_1 y e_3. Análogamente e_1 y e_2, se intersecan en un punto I_3 diferente de I_1 e I_2.

Sean Y', Y'' y Y''' los pies de las perpendiculares desde I_1 a los lados BC, CA y AB del triángulo, respectivamente.

I_1 está en la bisectriz del ángulo exterior en $B \Rightarrow IY' = IY'''$,

I_1 está en la bisectriz del ángulo exterior en $C \Rightarrow IY' = IY''$.

Por tanto, $IY''' = IY'' \Rightarrow I_1$ está en la bisectriz del ángulo en A, pero como la bisectriz exterior en A no pasa por I_1, entonces está en la bisectriz interior del $\angle A$.

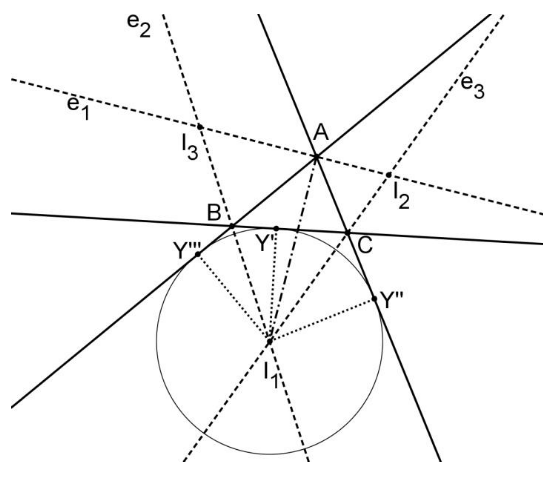


Figura 1.33

Ahora, ya que la distancia de I_1 a los tres lados del triángulo es la misma, la circunferencia con centro en I_1 con radio igual a esta distancia, pasa por los tres puntos Y', Y'' y Y''' A este círculo se le llama excírculo del triángulo y a I_1 se le llama excentro del triángulo.

De manera análoga hay una circunferencia con centro en I_2, tangente a los tres lados del triángulo, y otra con centro en I_3, tangente también a los tres lados del triángulo. Estas dos circunferencias también se llaman excírculos y sus centros también se llaman excentros.

Integrando el resultado del teorema anterior, se puede decir entonces que las bisectrices interiores y exteriores de un triángulo pasan por tercias por cuatro puntos y que cada uno de estos puntos es centro de una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.

En la figura 1.34 se presentan los cuatro puntos, el incentro y los tres excentros, y los cuatro círculos, el incírculo y los tres excírculos.

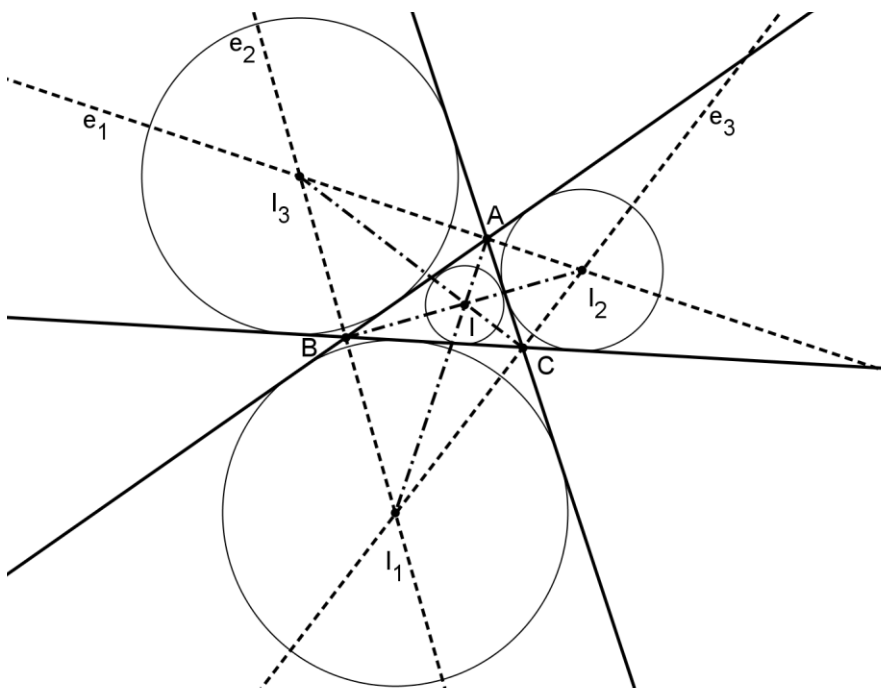


Figura 1.34

Se considera conveniente seguir utilizando notación estándar, por lo que en el resto del texto al circuncentro le seguiremos llamando *O*, al centroide *G*, al ortocentro *H*, al incentro I y a los excentros I_1, I_2 e I_3.

Problema 1.8.1

Dados tres puntos no colineales A, B y P, construir un triángulo que tengan como lado el segmento AB y donde P sea sucesivamente: su centroide, su ortocentro, su circuncentro, incentro o uno de sus excentros. Justifique su construcción y si en todos los casos tiene solución.

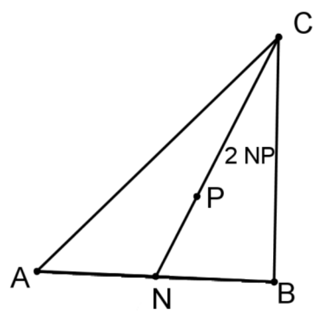


Figura 1.35

1) En el caso de que *AB* sea uno de los lados y se quiere que *P* sea el centroide, se traza *N* punto medio de *AB* y la recta *NP*.

   Se escoge sobre la recta *NP* un punto *C* tal que *PC* = 2*NP*. El triángulo *ABC* es el buscado.

   En el triángulo *ABC*, *CN* es la mediana por el vértice *C*, ya que *N* es el punto medio del lado *AB*. *P* es el centroide, ya que, por construcción, *P* triseca la mediana *CN*.

   El hecho de que el punto *P* es el centroide del triángulo garantiza que las rectas *BP* y *AP* son las medianas del triángulo.

2) En el caso de que *AB* sea uno de los lados y se quiere que *P* sea el ortocentro, se traza por *P* una perpendicular a *AB* y la recta *AP*.

   Se traza por *B* una perpendicular a *AP*. Sea *C* el punto de intersección de esta perpendicular por *B* con la perpendicular por *P* a *AB*. El triángulo *ABC* es el buscado.

   En el triángulo *ABC*, *CP* y *AP* son alturas, ya que por construcción son perpendiculares a los lados del triángulo, por tanto, *P* es el ortocentro del triángulo.

   Este hecho asegura que *BP* es la tercera altura del triángulo.

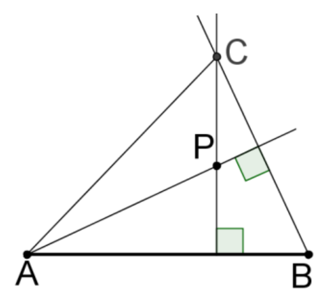


Figura 1.36

El resto de los casos se dejan para el lector.

Actividad 17

1. Diga, ¿cuáles de los siguientes puntos están siempre dentro del triángulo y cuáles siempre están fuera? Establezca las condiciones para las diferentes posiciones relativas al triángulo de aquéllos que no siempre están dentro o fuera.

   Circuncentro, centroide, ortocentro, incentro, excentros.

2. Resuelva el problema 1.8.1, para los casos que no se resuelven en el texto.

Actividad 18

Los triángulos isósceles tienen algunas propiedades específicas. En la sección 1.4 ya se demostró que los ángulos en la base son iguales. Hay otras propiedades relacionadas con las medianas, alturas y bisectrices que también tienen interés.

Demuestre:

1. Si dos ángulos de un triángulo son iguales, entonces el triángulo es isósceles.
2. En un triángulo isósceles, la mediana, la altura y la bisectriz correspondientes a la base del triángulo coinciden.
3. Si en un triángulo la altura, la mediana y la bisectriz de uno de sus lados coinciden, entonces el triángulo es isósceles.
4. Si en un triángulo coinciden un par entre la mediana, la altura y la bisectriz de uno de sus lados, entonces la tercera de éstas coincide también y el triángulo es isósceles.
5. En un triángulo isósceles, el incentro, centroide, ortocentro y circuncentro son colineales.
6. En un triángulo equilátero, el incentro, centroide, ortocentro y circuncentro del triángulo coinciden.
7. Si el circuncentro y el centroide de un triángulo coinciden, entonces el triángulo es equilátero.
8. El triángulo formado por los excentros de un triángulo *ABC* es isósceles si y sólo si el triángulo *ABC* es isósceles.

Triángulos pedales

A los triángulos cuyos vértices son los pies de las medianas, alturas o bisectrices de un triángulo se les llama triángulos pedales del triángulo: triángulo pedal de las medianas, triángulo pedal de las alturas, triángulo pedal de las bisectrices. Al triángulo pedal de las medianas se le llama también triángulo mediano y al triángulo pedal de las alturas, triángulo órtico. Algunos autores cuando aluden simplemente al triángulo pedal se refieren, en general, al órtico.

En la Actividad 15 ya se vieron las siguientes dos propiedades del triángulo mediano:

Teorema 1.8.4

Un triángulo ABC y su triángulo mediano LMN son semejantes y sus lados son paralelos. La razón de proporcionalidad entre $\triangle ABC$ y $\triangle LMN$ es 2:1.

Teorema 1.8.5

El radio del circuncírculo de un triángulo ABC es el doble del radio del circuncírculo de su triángulo mediano.

Sea el ΔABC y sea ΔLMN su triángulo mediano. Sea O el circuncentro del ΔABC y sea J el circuncentro del ΔLMN. Las rectas OL *y* ON son mediatrices del ΔABC. Las rectas JL' y JN' son mediatrices del ΔLMN.

El radio del circuncírculo del ΔABC es OB y el del circuncírculo del ΔLMN es JM, y como ya se demostró, $OB = 2JM$.

Al circuncírculo del ΔLMN se le llamó inicialmente circunferencia de Euler (siglo XVIII), o circunferencia de Feuerbach (siglo XIX), o bien circunferencia de los seis puntos, ya que se demostró que pasa también por los pies de las alturas del ΔABC.

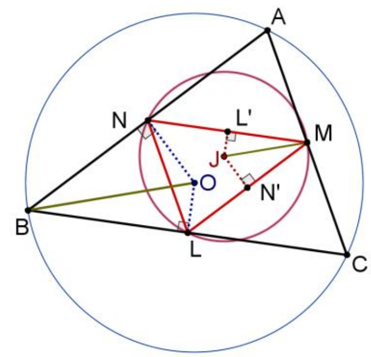


Figura 1.37

En particular Feuerbach demostró que esta circunferencia es tangente a los excírculos y el incírculo del triángulo Los matemáticos Brianchon y Poncelet (siglo XVIII) demostraron que esta circunferencia pasa también por los puntos medios de los segmentos entre los vértices del triángulo y el ortocentro, llamados puntos de Euler. De ahí que actualmente se le conozca como "circunferencia de los nueve puntos". Las demostraciones de estos resultados se harán posteriormente utilizando métodos de homotecia e inversión.

Teorema 1.7.6

El circuncentro de un triángulo es el ortocentro de su triángulo mediano.

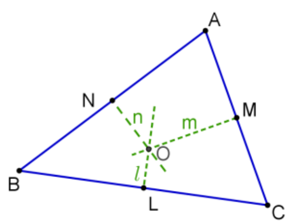


Figura 1.38

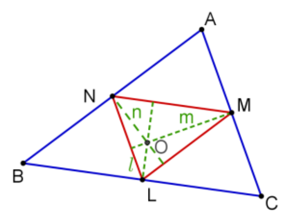


Figura 1.39

Sea el ΔABC y sean las rectas ℓ, m y n sus mediatrices; esto es, pasan por los puntos medios de sus lados L, M y N y son perpendiculares a sus lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea O el punto de intersección de las mediatrices, entonces O es el circuncentro del ΔABC.

El ΔLMN es el triángulo mediano del ΔABC y sus mediatrices ℓ, m y n pasan por los vértices L, M y N del triángulo mediano. Además, ya que ℓ es perpendicular a BC y NM es paralela a BC, entonces ℓ es perpendicular a NM y ℓ es altura del ΔLMN. Análogamente n y m son alturas de este triángulo y O es el ortocentro del ΔLMN.

Teorema 1.8.7

Los tres triángulos que determina el triángulo órtico, en un triángulo acutángulo, son semejantes al triángulo original.

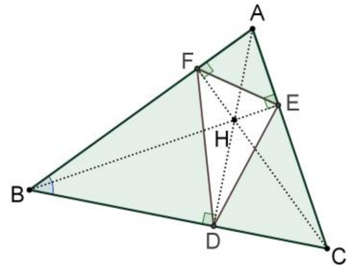


Figura 1.40

Sea el $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y D, E y F los pies de las alturas.

Lo que se desea demostrar es que los triángulos $\triangle FBD$, $\triangle DEC$ y $\triangle AFE$ son semejantes al $\triangle ABC$.

Demostración:

Para hacer la demostración se buscarán varias parejas de triángulos semejantes. Considérense primero los dos triángulos siguientes:

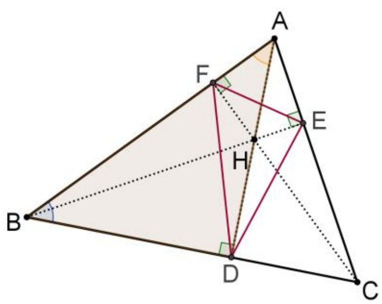


Figura 1.41

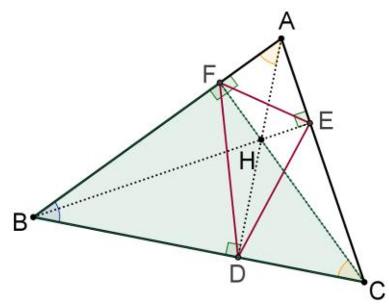


Figura 1.42

El $\triangle ABD$ que tiene un ángulo recto y el $\angle B$ y el $\triangle CBF$ que tiene también un ángulo recto y el $\angle B$. Los dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales y son semejantes (teorema 1.7.3), por lo tanto,

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BF} = \frac{AD}{CF} \quad \ldots(1)$$

Ahora, considérense los dos triángulos siguientes:

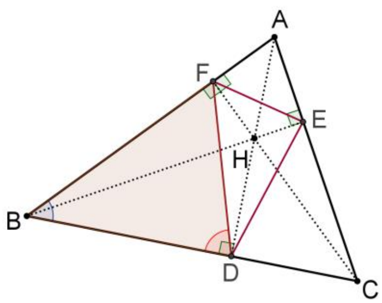


Figura 1.43

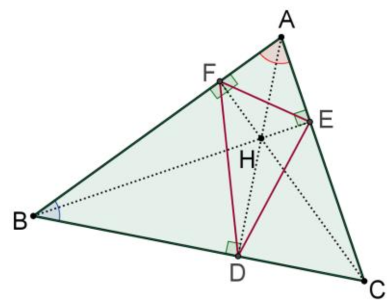


Figura 1.44

Uno de los ángulos del $\triangle BDF$ es $\angle B$ que comparte con el $\triangle ABC.$ Además de (1) se tiene que:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BF}$$

Los dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados adyacentes al mismo proporcionales, por lo tanto, son semejantes (teorema 1.7.4), como se quería demostrar.

Esto implica, en particular que el $\angle FDB$ del $\triangle BDF$ es igual al ángulo $\angle A$ del $\triangle ABC$; los dos marcados en rojo en las figuras 1.43 y 1.44.

De manera análoga se demuestra que los triángulos $\triangle DEC$ y $\triangle AFE$ son semejantes y semejantes al $\triangle ABC$. De esta forma resulta que los ángulos marcados en la figura 1.45 con el mismo color son iguales.

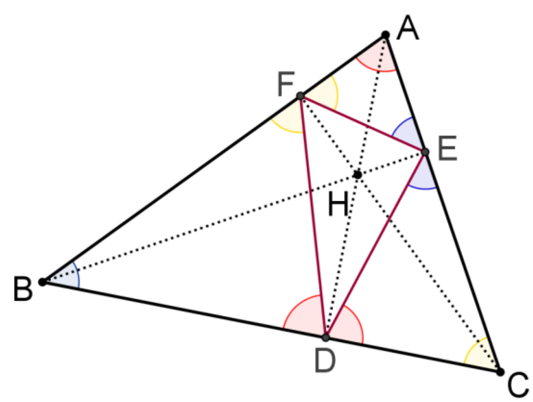


Figura 1.45

Actividad 19

Demuestre:

1. La mediana que pasa por un vértice de un triángulo, biseca cualquier paralela al lado opuesto a ese vértice.
2. El centroide de un triángulo es también centroide de su triángulo mediano.
3. El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico y sus vértices son los excentros de este mismo triángulo.
4. El vértice del ángulo obtuso de un triángulo obtusángulo es el incentro de su triángulo pedal (figura 1.46).
5. Los triángulos rectángulos no tienen triángulo órtico.

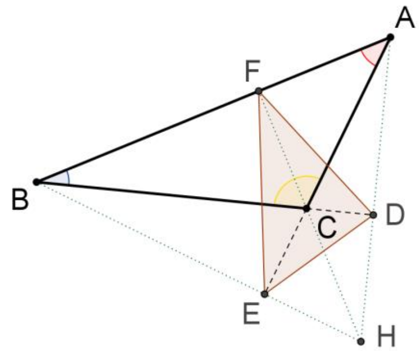


Figura 1.46

Actividad 20

Construir:

1. Un triángulo, dadas las longitudes de sus lados y de la mediana del tercer lado.
2. Un triángulo, dadas las longitudes de sus tres medianas.
3. Un triángulo, dada la suma de dos de sus lados y los ángulos opuestos a esos lados.

1.9 La recta de Euler

En la actividad 18 se demostró que en un triángulo isósceles los puntos del triángulo que se han considerado son colineales y que en un triángulo equilátero coinciden. En el caso de que los triángulos no sean isósceles o equiláteros, se puede entonces preguntar si bajo alguna otra condición son estos puntos colineales, o al menos de alguna terna de ellos. Euler demostró que en todo triángulo no equilátero el circuncentro, centroide y ortocentro son colineales.

Teorema 1.9.1

En todo triángulo no equilátero, el circuncentro, centroide y ortocentro son colineales y la distancia del ortocentro al centroide es el doble de la distancia del centroide al circuncentro.

Sea ABC un triángulo no equilátero, L y M los puntos medios de los lados BC y CA respectivamente. Sean AL y BM dos de sus medianas, por tanto, su intersección G es el centroide del triángulo. Se construyen las mediatrices por L y M, su intersección O es el circuncentro del triángulo. Ya que el triángulo no es equilátero, G y O son distintos (Actividad 18, 7).

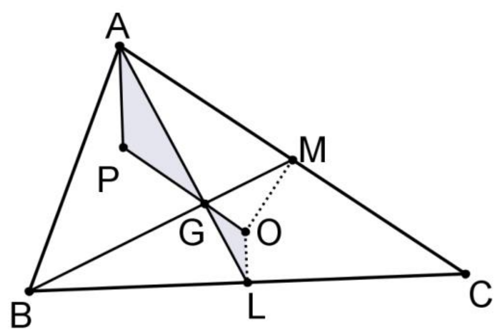


Figura 1.47

Se traza la recta *OG*. Se traza el punto *P* en la semirrecta de *OG* determinada por *G* que no contiene a *O* y tal que *PG = 2OG*. Por el teorema 1.7.4 los triángulos *APG* y *LGO* son semejantes, ya que,

$\angle AGP = \angle LGO$, por ser opuestos por el vértice,

$\frac{PG}{GO} = \frac{AG}{GL} = 2$, por construcción y teorema 2.1.1.

Luego, $AP = 2LO$, $\angle PAG = \angle OLG$ y $\angle GPA = \angle GOL$.

Por tanto, la recta *AP* es paralela *OL* y como *OL* es perpendicular a *BC*, también *AP* y por tanto *AP* es la altura por *A*.

Se traza ahora la recta *BP*. De manera análoga al caso anterior, se demuestra que $\Delta BPG \approx \Delta BOG$ y que la recta *BP* es paralela a *MO* y $BP = 2MO$. Por tanto, la recta *BP* es la altura por el vértice *B*. El punto *P* es por tanto el ortocentro del triángulo y queda demostrado el teorema.

A esta recta se le conoce como la recta de Euler del triángulo

Se puede observar que se demostró además que la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del punto medio del lado opuesto al circuncentro.

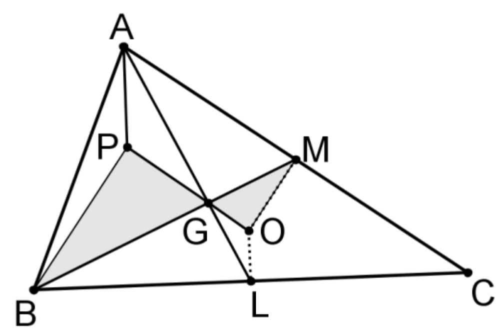


Figura 1.48

En el caso de los triángulos isósceles, la recta de Euler es la altura-mediana-mediatriz-bisectriz de la base del triángulo y ésta contiene también al incentro y uno de los excentros. Se puede demostrar que, si el incentro está en la recta de Euler, el triángulo es isósceles.

Actividad 21

1. Revise si la demostración del teorema 1.9.1 es válida para el caso de triángulos rectángulos y obtusángulos.
2. Demuestre que en un triángulo *ABC*, si la recta de Euler es perpendicular a *BC*, entonces $AB = AC$.

3. Demuestre que un triángulo es isósceles si y sólo si el incentro está en la recta de Euler.

1.10 Los cuantificadores

Hasta ahora se ha trabajado con proposiciones geométricas como:

- En un triángulo no equilátero, su circuncentro, su centroide y su ortocentro son colineales.
- Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo son concurrentes.
- Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

Todas ellas son de la forma $p \Rightarrow q$, aun cuando no están escritos de esta forma, se pueden reescribir como:

- Si un triángulo es no equilátero entonces su circuncentro, su centroide y su ortocentro son colineales.
- Si *ABC* es un triángulo entonces sus bisectrices interiores son concurrentes.
- Si *ABCD* es un paralelogramo entonces sus ángulos opuestos son iguales.

También se pueden escribir de la siguiente forma:

- Para todo triángulo no equilátero se tiene que su circuncentro, su centroide y su ortocentro son colineales.
- Para todo triángulo se tiene que sus bisectrices interiores son concurrentes.
- En todo paralelogramo sus ángulos opuestos son iguales.

En estas proposiciones se propone una propiedad que cumplen todos los elementos de un determinado conjunto: todos los triángulos no equiláteros, todos los triángulos, todos los paralelogramos.

Para demostrar que la proposición "*Para todo triángulo se tiene que sus bisectrices interiores son concurrentes*" es verdadera, hay que demostrar que, dado un triángulo cualquiera, sus bisectrices interiores son concurrentes, mientras que para demostrar que es falsa, basta con mostrar que existe al menos un triángulo en el que las bisectrices interiores no son concurrentes.

Si se revisa la demostración que se realizó para esta proposición (teorema 1.8.3), resulta claro que solamente se utilizó la característica de la figura de ser triángulo y de que las rectas son bisectrices de los ángulos interiores del triángulo. Esto quiere decir que la demostración que se realizó es aplicable a todo triángulo y por tanto la proposición es verdadera.

Por ello, cuando se realiza una demostración hay que tener cuidado de que no se estén utilizando, sin querer, propiedades que no forman parte de la hipótesis como en el caso del ejemplo de la Actividad 16.

En el caso de estas proposiciones se está utilizando un cuantificador, llamado universal, que nos indica que se está afirmando algo de todos los elementos de un conjunto determinado.

Este no es el único cuantificador que se utiliza en Matemáticas. En general, los cuantificadores son operadores lógicos que modifican al sujeto de una proposición. El símbolo utilizado para el cuantificador universal**,** *para todos*, es $\forall$.

Ahora, si la proposición *p* es "*todos los triángulos son isósceles*"; la proposición $\neg p$ es "no *todos los triángulos son isósceles*". Ahora bien, esta negación *no significa que ningún* triángulo es isósceles, sino que al menos *existe un triángulo* que no es isósceles. Se puede decir entonces que $\neg p$ es lógicamente equivalente a *existe (al menos) un triángulo* que no es isósceles. *Existe* es otro de los cuantificadores que se usa frecuentemente en Matemáticas; se le llama el cuantificador existencial y se simboliza como $\exists$.

En general, para demostrar que una proposición *p* que afirma que "*todos* los *elementos de un conjunto satisfacen una propiedad dada*" es falsa, basta con mostrar *existe* un elemento de dicho conjunto que *no* satisface esta propiedad.

Y para demostrar que una proposición *p* que afirma que "*existe un elemento de un conjunto que satisface una propiedad dada*", es falsa, hay que demostrar que todos los elementos del conjunto no la satisfacen.

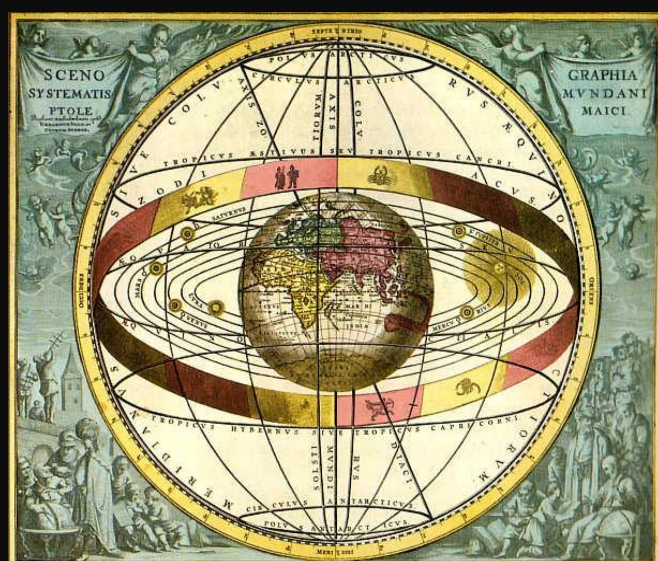
Con esta sección se cierra la incursión en la lógica, sin dejar de mencionar que la demostración es un proceso de comprobación sobre lo que la intuición y la conjetura nos sugiere. Por ello se cierra esta sección con una cita de Sáenz (2001).

> "Un estudiante seriamente interesado en las matemáticas, que pretenda dedicar a ellas su vida, debe aprender el razonamiento demostrativo; es su profesión y el signo distintivo de su ciencia. Sin embargo, para obtener un éxito real debe también aprender el razonamiento plausible; de él dependerá su labor creadora".

UNIDAD DOS

Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

2.1 Circunferencias y cuadriláteros
2.2 Ángulos en la circunferencia y cuadriláteros cíclicos
2.3 Potencia de un punto
2.4 Tangentes a la circunferencia y la recta de Simson
2.5 El teorema de Ptolomeo y rectas antiparalelas
2.6 Las cuerdas de Ptolomeo y algo de trigonometría
2.7 Apéndice de Trigonometría



Sistema Geocéntrico de Ptolomeo

2.1 Circunferencias y cuadriláteros

Como se recordará, en una circunferencia se llama:

Radio. A un segmento de recta que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.

Cuerda. A un segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia.

Diámetro. A toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

Secante. A una recta que corta a la circunferencia en dos puntos distintos.

Tangente. A una recta que tiene solamente un punto común con la circunferencia.

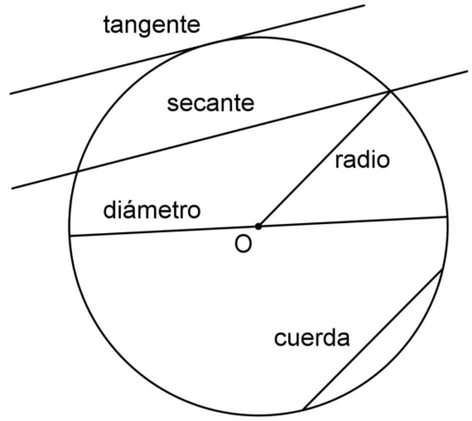


Figura 2.1

Se ha visto que dos puntos determinan una única recta, ¿cuántos puntos determinarán una única circunferencia? Supóngase que se tienen dos puntos, ¿cómo determinar el centro de la o las circunferencias que pasan por esos dos puntos? Para encontrar el centro de una circunferencia que pasa por dos puntos P y Q, se requiere encontrar un punto que equidiste de estos dos puntos, esto es, tendrá que estar en la mediatriz del segmento PQ. Pero, además, todos los puntos de la mediatriz equidistan de P y de Q, por tanto, todos los puntos de la mediatriz son centro de una circunferencia que pasa por P y por Q.

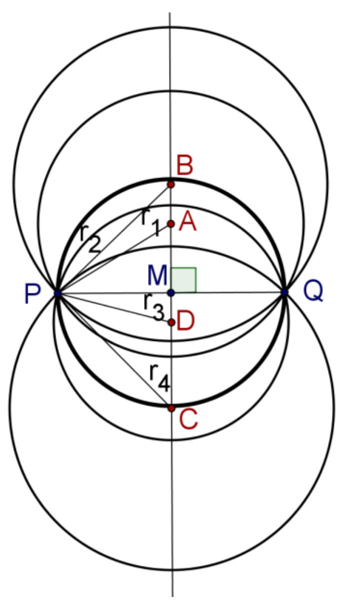


Figura 2.2

En la figura 2.2 se tienen dos puntos *P* y *Q*, *M* es el punto medio del segmento *PQ* y la perpendicular por *M* a *PQ* es la mediatriz del segmento. Cualquier punto *A*, *B*, *C*, etc., sobre la mediatriz es centro de una circunferencia que pasa por *P* y *Q*. Basta trazar la circunferencia con centro en *A*, *B*, etc., y de radio *r* igual a la distancia de ese punto a *P* o a *Q* y esta circunferencia pasa por los dos puntos. Así, se tiene un número infinito de circunferencias que pasan por dos puntos, una con centro en cada punto de la mediatriz. La de radio menor es la que tiene centro en *M*, ya $PM < r_i$, $\forall\ r_i$, donde r_i es la distancia de cualquier punto de la mediatriz a *P* o a *Q*.

Considérense ahora tres puntos no colineales, ¿cuántas circunferencias pasan por eso tres puntos? Sean *P*, *Q* y *R* tres puntos no colineales. Para que un punto *O* sea centro de una circunferencia que pase por *estos* tres puntos tiene que estar en la intersección de las mediatrices del triángulo determinado por estos tres puntos, que como ya se vio, es el circuncentro del triángulo.

Teorema 2.1.1

Existe una única circunferencia que pasa por tres puntos no colineales.

Dado que tres puntos no colineales determinan una única circunferencia, si se consideran cuatro puntos, no colineales por tercias, ¿habrá alguna circunferencia que pase por esos puntos, o qué condiciones tendrán que cumplir para que estén sobre una circunferencia?

Ejemplo 2.1.1

Supóngase que *P*, *Q*, *R* y *S* son los vértices de un cuadrado.

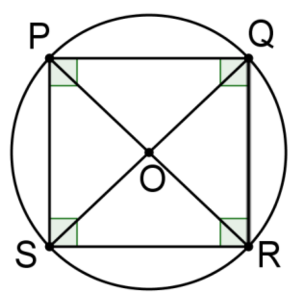


Figura 2.3

Se trazan las diagonales *PR* y *QS* y se tiene:

PR = *QS*, (Actividad 12, 4)

SO = *OQ* y *RO* = *CO*, (Actividad 11, 4), de donde

SO = *OQ* = *RO* = *OP*,

esto es, O equidista de P, Q, R y S y por tanto es centro de una circunferencia que pasa por estos puntos. El radio r es igual a la distancia común de O a esos puntos.

Se ha demostrado entonces que cualquier cuadrado es inscriptible en una circunferencia. De hecho, en la demostración solamente se usó la propiedad del cuadrado de ser rectángulo (diagonales iguales y que se bisecan), por lo que esta demostración es igualmente válida para el rectángulo, por lo que también se puede afirmar que cualquier rectángulo es inscriptible en una circunferencia. ¿Será entonces inscriptible cualquier paralelogramo?

En el caso general de los cuadriláteros existen inscriptibles y no inscriptibles. A los cuadriláteros inscriptibles también se les llama cíclicos. Puede haber cuadriláteros cuyos lados sean iguales y tales que unos sean cíclicos y otros no, así que se buscará alguna condición sobre sus ángulos que permita conocer cuando un cuadrilátero es cíclico. Para ello se verá la relación entre los ángulos inscritos, que tienen en su vértice en la circunferencia, y los arcos que abarcan.

Actividad 22

Demuestre:

1. La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.
2. La perpendicular a una cuerda por el centro de la circunferencia la biseca.
3. En una misma circunferencia, dos cuerdas tienen la misma longitud si y sólo si son equidistantes del centro.
4. De un par de cuerdas de una circunferencia, la mayor está más cerca del centro.
5. Demuestre que el diámetro es la cuerda de longitud máxima en un círculo dado.
6. La línea de los centros de dos circunferencias que se cortan es la mediatriz de la cuerda común.

2.2 Ángulos en la circunferencia y cuadriláteros cíclicos

Dos puntos P y Q en una circunferencia lo dividen en dos partes a las que se denomina arcos. En general se denota como $\widehat{PQ}$ al menor de los arcos determinados por P y Q.

En la figura 2.4 se denota con $\widehat{PQ}$ al arco menor de los determinados por los puntos P y Q. Para evitar ambigüedad en ocasiones se denotan los arcos con tres literales.

En la misma figura, el arco menor es el arco $\widehat{PBQ}$ y el mayor es el $\widehat{PAQ}$; en esta forma es más claro a cuál de ellos se está uno refiriendo.

Si el contexto permite saber con certeza de cuál de los arcos se trata, se utiliza la notación con dos literales, de la misma forma en que se utiliza la notación $\angle A$, en lugar de $\angle AOB$.

¿Cómo se mide un arco? La manera más común para medirlo es por la fracción de circunferencia que abarca. Esto nos lleva a conocer cuánto mide la circunferencia.

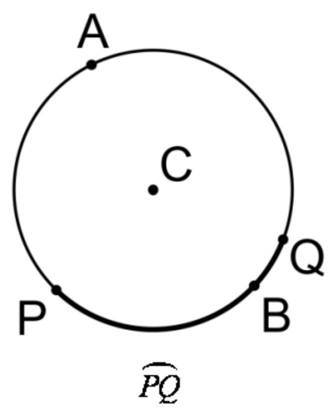


Figura 2.4

Desde la antigüedad era conocido que en las circunferencias se mantiene una relación constante entre su perímetro y su diámetro, independientemente de su tamaño. A esta constante es a la que se ha llamado π desde el siglo XVII. Aparentemente el nombre proviene de la palabra "peripheria", que era el nombre que daban los griegos al perímetro de un círculo, y cuya inicial en griego es precisamente π.

A lo largo de la historia se han obtenido valores cada vez más aproximados (más cifras decimales) para esta constante. Para calcular el área del círculo los egipcios tomaban esta constante como $3\frac{1}{6}$. Arquímedes utilizó polígonos regulares de 96 lados, inscritos y circunscritos a la circunferencia, para obtener la estimación $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ (Boyer, 1968). En el siglo XVII con el desarrollo del análisis se realizaron mejores aproximaciones de π a través de la utilización de series y productos infinitos. En la actualidad el uso de las computadoras ha permitido calcular un gran número de sus decimales. Fue hasta finales del siglo XVIII que se demostró que π es un número irracional (no se puede expresar como una fracción) y hasta el siglo XIX se demostró que es un número trascendente (que no es raíz de un polinomio con coeficientes enteros).

De la definición del número π se tiene que la longitud de una circunferencia de radio *r* es $2\pi r$ y de los postulados 5 (a y b), se tiene:

Teorema 2.2.1

La medida numérica de un ángulo central es la misma que la del arco que subtiende. Esto generalmente se expresa en como "la medida de un ángulo central es la misma que la del arco que abarca o subtiende".

Dos las unidades de medida más usadas son el grado (o grado sexagesimal) y el radián.

Para definir el grado se toma como unidad para medir la circunferencia un arco $\hat{u} = \frac{1}{360}\, C$, donde C es la longitud total de la circunferencia. Al ángulo que abarca este arco se le llama grado y se usa el símbolo º para denotarlo. En la figura 2.5 se tiene $\hat{u} = \widehat{PA_1}$ y $\angle POA_1 = \varepsilon = 1º$.

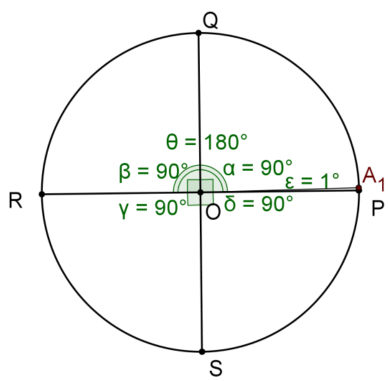


Figura 2.5

De la definición y el teorema 2.2.1 es claro que el ángulo central que abarca toda la circunferencia es de 360º. Si se trazan dos diámetros perpendiculares los cuatro ángulos formados son iguales a un recto cada uno, y abarcan arcos iguales, por lo que cada uno es de un cuarto de circunferencia, es decir cada ángulo es de un cuarto de 360º, por lo que cada uno es de 90º. Un ángulo de lados colineales abarca la mitad de la circunferencia, por tanto, es de 180º.

El origen del grado (sexagesimal) se remonta a los babilonios que dividían la circunferencia en 360 partes; también de ellos proviene la división del grado en 60 minutos y el minuto en 60 segundos (de ahí su nombre de sexagesimal). En la sección 1.1 ya se mencionó que el sistema de numeración de los babilonios era sexagesimal. La persistencia de este sistema en la medida de los ángulos se debe seguramente a su adopción por los griegos y a que casi la totalidad de los aparatos para medición de ángulos como los sextantes, teodolitos, brújulas, etc., están graduados según este sistema.

Actualmente las calculadoras científicas pueden trabajar con este sistema de grados sexagesimales, a los que llamaremos grados simplemente, con grados centesimales o con radianes. En este curso no se trabajará con los ángulos centesimales ya que prácticamente no se utilizan, solamente se menciona que en este caso se divide la circunferencia en 400 partes, de tal manera que un ángulo recto mide 100 grados centesimales. La primera mención a este sistema de medida de los ángulos fue en el siglo XV y se trató de implantar en Francia durante el siglo XVIII. Algunos instrumentos náuticos todavía lo utilizan.

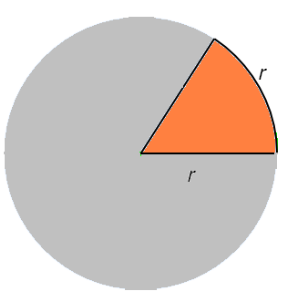


Figura 2.6

Un ángulo central que abarca un arco de longitud igual al radio del círculo recibe el nombre de radián. En la figura 2.6 el ángulo marcado es de un radián. Dado que la longitud de cualquier circunferencia es $2\pi r$, si se toma como unidad de medida el radián, se tiene entonces que la medida del ángulo $\theta = 360º$ expresada en radianes es de $2\,\pi$ radianes.

Entonces, de acuerdo con el teorema 2.2.3, un ángulo de 180º es de π radianes y uno de 90º es de $\pi/2$ radianes.

En la figura 2.7 se presenta la medida de algunos ángulos expresadas tanto en grados como en radianes.

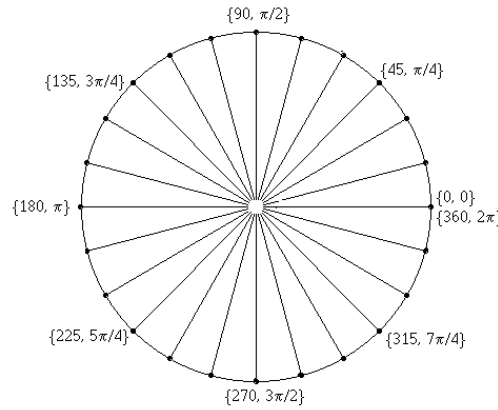


Figura 2.7

Planteando nuevamente la pregunta original: ¿cuál es la relación entre los ángulos inscritos y el arco que abarcan?

Teorema 2.2.2

La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida del arco que abarca.

Demostración:

Sea *C* una circunferencia con centro en *O* y α un ángulo inscrito con vértice en *R* que está en *C* y que subtiende el arco $\widehat{PQ}$. La base de la demostración es probar que α es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

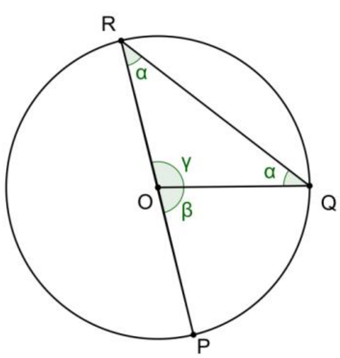


Figura 2.8

Se trazan los radios *OP* y *OQ* y se considera el ángulo central β que subtiende el mismo arco $\widehat{PQ}$. La demostración se dividirá en tres casos:

1. Cuando *P*, *O* y *R* (o bien *Q*, *O* y *R*) son colineales.

   Considérese el ΔORQ, $OR = OQ$, por ser radios; por tanto, el triángulo es isósceles y el ángulo interior en *Q* es igual a α. Además β, el ángulo central que subtiende el mismo arco, es ángulo exterior adyacente al tercer ángulo del triángulo γ. Por tanto $\beta = 2\alpha$, como se quería demostrar.

2. Cuando O está en el interior del ángulo $\angle PRQ = \alpha$. Se traza el diámetro que pasa por R. Considérese ΔORP y ΔORQ. Por el resultado del inciso anterior se tiene que $\beta_1 = 2\alpha_2$ y $\beta_2 = 2\alpha_1$. Además $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ y $\beta = \beta_1 + \beta_2$, por tanto, $\beta = 2\alpha$, como se quería demostrar.

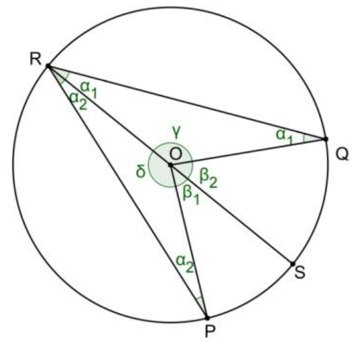


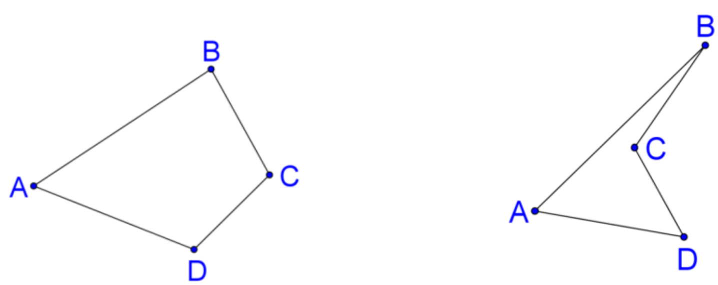
Figura 2.9

3. En el caso en que el centro O de la circunferencia esté fuera del ángulo α se traza igualmente el diámetro RS y se obtienen las dos mismas igualdades que en el caso anterior, sólo que para obtener el ángulo α en lugar de que los ángulos se sumen, se restan.

Una consecuencia directa de este teorema es la condición que se está buscando sobre los ángulos de los cuadriláteros cíclicos.

Pero antes de continuar haremos un pequeño paréntesis para indicar que en este curso se trabajará solamente con polígonos convexos. A los polígonos cuyos ángulos son menores que dos rectos se les llama convexos y a los que tienen algún ángulo mayor a dos rectos cóncavos. Observe que cualquier cuadrilátero no puede tener más de un ángulo mayor que dos rectos. Los paralelogramos son cuadriláteros convexos.

En la figura 2.10 se presenta un ejemplo de un cuadrilátero convexo, que es con los que se ha estado y se seguirá trabajando, y de un cuadrilátero cóncavo.



Cuadrilátero convexo *Cuadrilátero cóncavo*

Figura 2.10

Teorema 2.2.3

Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios.

Demostración:

Sea el $\square PQRS$ cíclico. Sean $\angle PQR = \alpha$ y $\angle RSP = \beta$. El ángulo α es inscrito y abarca el arco $\widehat{PSR}$; el ángulo β también es inscrito y abarca el arco $\widehat{RQP}$.

Además, $\widehat{PSR} + \widehat{RQP} = 2\pi$, por tanto, por el teorema 2.2.2 se tiene $\alpha + \beta = \pi$, como se quería demostrar. Observe que los otros dos ángulos del cuadrilátero también son suplementarios ya que la suma de los cuatro ángulos es igual 2π radianes.

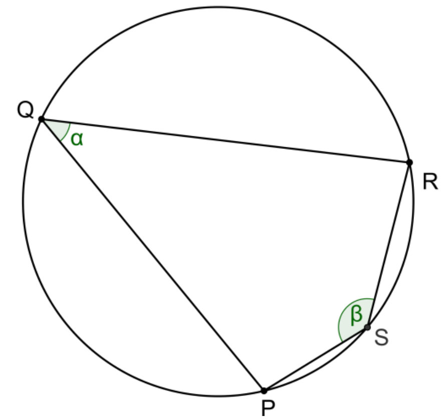


Figura 2.11

Ahora se demostrará que la condición de los ángulos opuestos suplementarios no sólo es necesaria sino también es suficiente para que el cuadrilátero sea cíclico; es decir, se demostrará que un cuadrilátero que tenga un par de ángulos opuestos suplementarios es cíclico.

Esta demostración se realizará por *contradicción o reducción al absurdo* que como ya se ha dicho, se utiliza mucho en matemáticas.

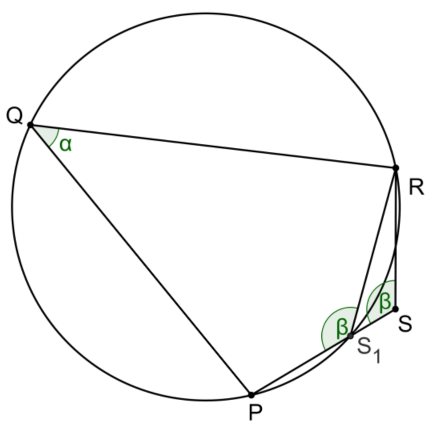


Figura 2.12

Sea el $\square PQRS$ y sean $\angle PQR = \alpha$ y $\angle RSP = \beta$ tales que $\alpha + \beta = \pi$. Se traza la circunferencia que pasa por los vértices *P*, *Q* y *R* (teorema 2.2.1). Supóngase que esta circunferencia no pasa por *S*, se traza el segmento *SP* y se llama S_1 al punto de intersección de *PS* con la circunferencia. El cuadrilátero $\square PQRS_1$ es cíclico por construcción, por tanto $\angle PS_1R$ es suplementario de α, por el resultado anterior y ya que α y β son por hipótesis suplementarios, se tiene que $\angle PS_1R = \beta$.

Estos dos ángulos son correspondientes e iguales, por tanto, *RS* y RS_1 son paralelas, pero estas dos rectas tienen a *R* como punto común, por lo tanto, no pueden ser paralelas. Esto es, del hecho que la circunferencia determinada por *P*, *Q* y *R* no pase por *S*, se ha llegado a una contradicción, por tanto, la circunferencia tiene que pasar por *S*, como se quería demostrar.

A la luz de este resultado demostrar que los únicos paralelogramos cíclicos son los rectángulos es inmediato, ya que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales y para ser inscriptibles tienen que ser suplementarios, por tanto, tienen que ser rectos.

Actividad 23

Demuestre:

1. Un ángulo inscrito es recto si y sólo abarca un diámetro.
2. La medida del ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan dentro del círculo es igual a la de la semisuma de los arcos que abarca.
3. La medida del ángulo formado por dos secantes que se intersecan en un punto exterior al círculo es igual a la semidiferencia de los arcos que abarca.
4. Dos ángulos inscritos que abarcan la misma cuerda son iguales o suplementarios.

Actividad 24

Demuestre:

1. Si una recta corta dos círculos concéntricos determinando la cuerda *XY* en el más grande y la cuerda *PQ* en el menor, entonces *XP* = *QY*.
2. Sea un triángulo isósceles *ΔABC.* Por un punto *D* en el lado *AB* se traza una paralela al lado *BC,* si *E* es el punto de intersección de esta paralela con *AC,* entonces el cuadrilátero *BDEC* es inscriptible.
3. Dos circunferencias se cortan en los puntos *P* y *Q.* Se trazan los diámetros de los dos círculos que pasan por *P.* Sean *X* y *Y* los puntos de intersección de estos diámetros con cada una de las circunferencias, entonces la recta *XY* pasa por el punto *Q.*
4. Sean *A*, *B*, *C* y *D* los vértices consecutivos de un cuadrilátero cíclico y sean W, X, Y y Z los puntos medios de $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ y $\widehat{DA}$ respectivamente. Entonces las cuerdas *WY* y *XZ* son perpendiculares.
5. Dado una circunferencia *C* y dos puntos *P* y *Q* exteriores al círculo. Se trazan dos secantes por cada uno de los puntos exteriores de tal forma que se corten sobre la circunferencia en cuatro puntos *A, B, C* y *D*, entonces las bisectrices *PX* y *PY* de los ∠*P* y ∠*Q* son perpendiculares.
6. Si *PQ* y *RS* son dos cuerdas paralelas en una circunferencia, entonces *PR* = *QS*.
7. *H* es el ortocentro del ∆*ABC*, la altura por *A* corta al lado opuesto en *D* y al circuncírculo en *K*, entonces *HD* = *DK*.

Actividad 25

Demuestre

1. Todo trapecio isósceles es inscriptible.
2. Todo pentágono regular es inscriptible.

3. Todo polígono regular es inscriptible.

Actividad 26

1. Dado un círculo de radio *r,* construya el rectángulo inscrito de área máxima.
2. Dado un pentágono regular de lado *x*, determine el centro y el radio de la circunferencia circunscrita.
3. Sea *C* una circunferencia con centro en *O.* Sea *P* un punto cualquiera exterior a la circunferencia. Encuentra el lugar geométrico de los puntos *Y* tales que, *Y* es el punto medio del segmento *PX,* para *X* en *C.*

2.3 Potencia de un punto y la recta de Simson

Teorema 2.3.1

Sean P un punto en el plano y C una circunferencia dada, para cualquier recta que pase por P y corte a la circunferencia C en dos puntos Q y R, el producto $PQ \times PR$ *es constante.*

Demostración:

Se tienen dos casos posibles: que *P* esté fuera de la circunferencia o que esté dentro.

Supóngase primero que el punto *P* está fuera y que tenemos dos rectas *m* y *n* que pasan por *P* y que la cortan en *Q* y *R* y en Q_1 y R_1, respectivamente.

Se trazan los segmentos QR_1 y Q_1R. Sea β el ángulo $\angle QRQ_1$ y β_1 el ángulo $\angle QR_1Q_1$. Entonces, $\beta = \beta_1$, ya que los dos ángulos son inscritos y abarcan el arco QQ_1 (2.2.2).

Por tanto, $\Delta PQR_1 \approx \Delta PQ_1R$, ya que tienen dos ángulos iguales (teorema 1.5.3). Por tanto,

$$\frac{PQ}{PQ_1} = \frac{PR_1}{PR} \Rightarrow PQ \times PR = PQ_1 \times PR_1,$$

como se quería demostrar.

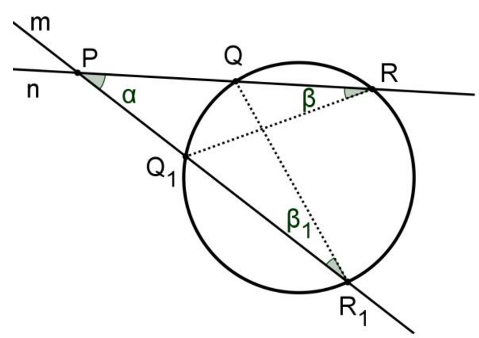


Figura 2.13

Supóngase ahora que el punto *P* está dentro de la circunferencia y que tenemos igualmente dos rectas *m* y *n* que pasan por *P* y que la cortan en *Q* y *R* y en Q_1 y R_1, respectivamente.

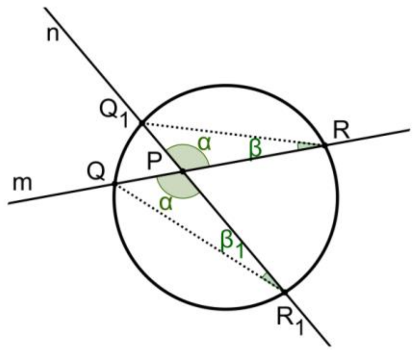


Figura 2.14

De manera análoga al caso anterior se demuestra que los ángulos β y β_1 son iguales y que $\Delta\, PQR_1 \approx \Delta\, PQ_1R$.

Asimismo:

$$\frac{PQ}{PQ_1} = \frac{PR_1}{PR} \Rightarrow PQ \times PR = PQ_1 \times PR_1,$$

como se quería demostrar.

El resultado anterior indica que el producto $PQ \times PR$ no depende de la posición de la recta que pasa por el punto P, sino solamente de P y de la circunferencia, ya que este producto es constante. Se define la *potencia de un punto con respecto a una circunferencia* como el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con él.

Más sobre triángulos pedales

Dado un $\Delta\, ABC$, el triángulo pedal de un punto P cualquiera, respecto del $\Delta\, ABC$, es el triángulo que tiene como vértices los pies de las perpendiculares de P a los lados del $\Delta\, ABC$.

De acuerdo con esta definición el triángulo que definimos como triángulo pedal de las alturas o triángulo órtico es el triángulo pedal del ortocentro y el que definimos como triángulo mediano es el triángulo pedal del circuncentro.

En el caso de que el punto P esté en el circuncírculo del $\Delta\, ABC$ no se forma un triángulo, sino que estos puntos son colineales y a esta recta se le llama la "*línea de Simson de P con respecto al triángulo ABC*".

Teorema 2.3.2

Sean PX, PY y PZ las perpendiculares bajadas a los lados del triángulo ABC, desde cualquier punto P de su circuncírculo. Los puntos X, Y y Z son colineales.

Demostración:

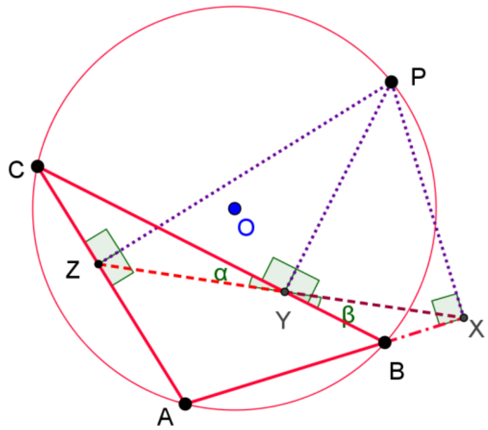


Figura 2.15

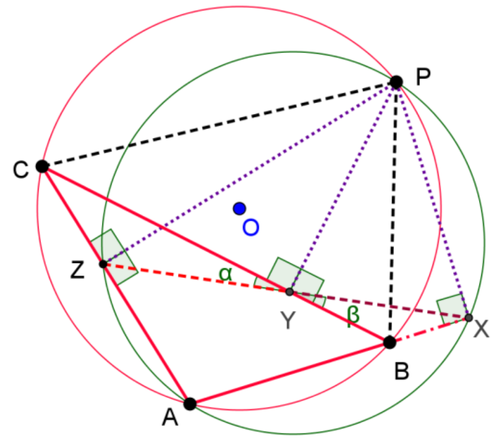


Figura 2.16

Sea *ABC* un triángulo y *P* un punto en su circuncírculo. Sean *PX*, *PY* y *PZ* las perpendiculares desde *P* a los lados *AB*, *BC* y *CA* del triángulo, respectivamente. Se demostrará que *X*, *Y* y *Z* son colineales, demostrando que los ángulos $\alpha = \angle CYZ$ y $\beta = \angle BYX$ son iguales.

El □*AXZP* es cíclico ya que los ángulos *PXA* y *PZA* son rectos (Actividad 23,1). Luego, $\angle ZAX = 180° - \angle ZPX$ (Teorema 2.2.3). Ya que *C*, *Z* y *A* son colineales, se tiene que $\angle ZAX = \angle CAB$. Además, como *P* está en el circuncírculo del ΔABC, el cuadrilátero *ABCP* es cíclico y $\angle CAB = 180° - \angle CPB$.

Se tiene entonces que $180° - \angle XPZ = 180° - \angle CPB$, de donde $\angle ZPX = \angle CPB$.

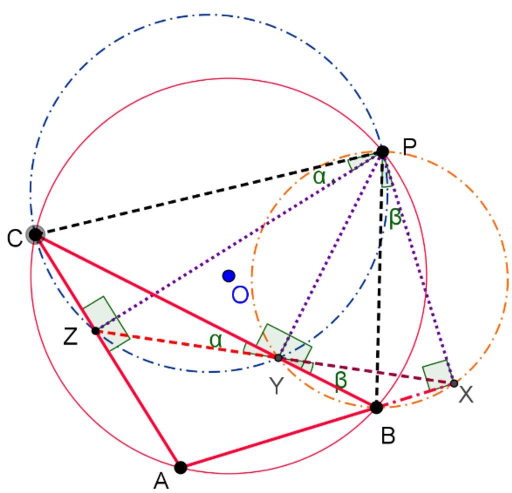


Figura 2.17

La circunferencia con diámetro *PC* pasa por *Y* y por *Z*, ya que los ángulos *PZC* y *PYC* son rectos (Actividad 23,1). Luego el □ *PCZY* es inscriptible y $\angle CPZ = \angle CYZ$, ya que son inscritos en la misma circunferencia y abarcan el mismo arco.

La circunferencia con diámetro *PB* pasa por *Y* y por *X*, ya que los ángulos *PYB* y *PXB* son rectos. Luego el □ *PYBX* es inscriptible y $\angle BYX = \angle BPX$, ya que son inscritos en la misma circunferencia y abarcan el mismo arco.

Además, $\angle ZPX = \angle ZPB + \beta$ y $\angle CPB = \alpha + \angle ZPB$ y como $\angle ZPX = \angle CPB$, se tiene que $\alpha = \beta$, como se quería demostrar.

2.4 Tangentes a la circunferencia

Teorema 2.4.1
Una tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado al punto de contacto.

Demostración:

Sea C una circunferencia con centro en O y radio r. Sea P un punto en la circunferencia C y sea m la tangente a la circunferencia en P. Se traza el radio de la circunferencia OP, por tanto, $OP = r$. Se quiere demostrar que $OP \perp m$. Para ello se supondrá que OP no es perpendicular a m y se llegará a una contradicción.

Si OP no es perpendicular a m, desde O se traza una perpendicular a m. Sea Q el pie de la perpendicular. Sea $s = OQ$. Entonces $s < r$, por el corolario 2 del teorema de Pitágoras, y Q está en el interior de la circunferencia. Pero si Q está en el interior de la circunferencia, entonces m corta al círculo en dos puntos, por el postulado (3, d), contrario a la hipótesis de que m es tangente a la circunferencia. Por tanto, $OP \perp m$, como se quería demostrar.

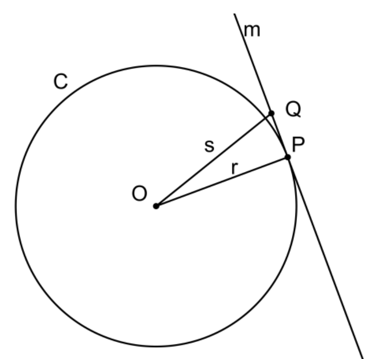


Figura 2.18

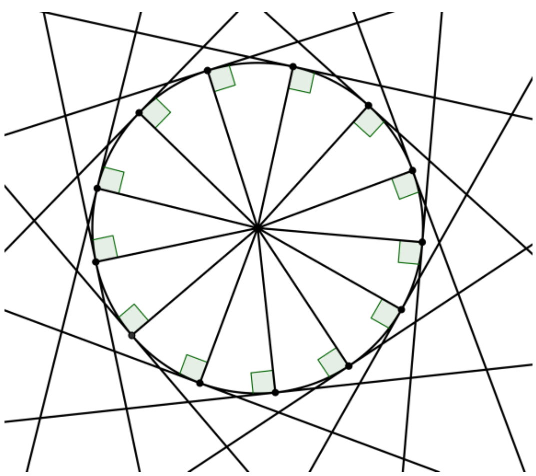


Figura 2.19

Corolario 1: Por cada punto en la circunferencia existe una tangente a la misma en ese punto.

Corolario 2: La tangente a una circunferencia en un punto sobre la misma es única.

Corolario 3: La perpendicular a una tangente a la circunferencia en el punto de contacto pasa por su centro.

Los resultados anteriores indican que para trazar una tangente al círculo por un punto del mismo sólo hay que trazar un radio al punto de tangencia y la tangente será la perpendicular al radio por ese punto.

¿Cómo proceder en el caso en que el punto desde donde se quiere trazar la tangente no esté en la circunferencia?

Sea C una circunferencia con centro en O y radio r y sea P el punto desde donde se quiere trazar la tangente. Se observa en primer lugar que solamente se pueden trazar tangentes desde un punto exterior, ya que toda recta por un punto interior del círculo corta al círculo en dos puntos por el postulado (3, d). Sea entonces *P* un punto exterior a la circunferencia. Si se supone que existe la tangente al círculo desde *P*, entonces es perpendicular al radio en el punto de contacto; por tanto, para trazar la tangente habrá que determinar un punto *Q* en el círculo tal que las rectas *OQ* y *PQ* sean perpendiculares. Entonces, con base en las propiedades de los ángulos inscritos se realiza la siguiente construcción:

Se traza la recta *OP* y se construye *M* su punto medio. Se traza una circunferencia C_1 con centro en *M* y radio *MO*. La circunferencia C_1 pasa por *P*, por construcción. Sean *Q* y *R* las intersecciones de las circunferencias *C* y C_1 (axioma 3, d). Las rectas *PQ* y *PR* son tangentes al círculo *C* en *Q* y *R* respectivamente.

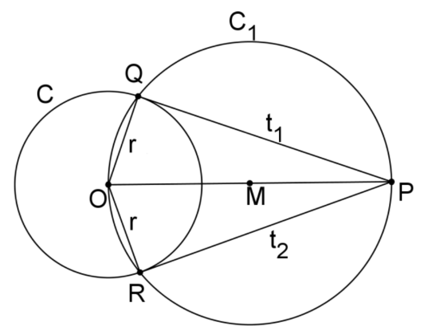


Figura 2.20

Demostración:

Se trazan los radios *OQ* y *OR*, entonces los ángulos $\angle OQP$ y $\angle ORP$ son inscritos en el círculo C_1 y abarcan un diámetro, por tanto, son rectos y *OQ* es perpendicular a *PQ* en el punto *Q* y *OR* es perpendicular *PR* en el punto *R*, como se quería demostrar.

De la construcción y la demostración anterior se concluye que por cada punto exterior al círculo pasan dos tangentes al círculo. Estas tangentes tienen la misma longitud y forman el mismo ángulo con la línea que une el centro del círculo y el punto desde donde se trazan las tangentes. Se deja como ejercicio la demostración.

Tangentes comunes

Un par de circunferencias puede tener una o varias tangentes comunes o no tener tangente común, dependiendo de la magnitud de sus radios y de la distancia entre sus centros.

Una tangente común a dos circunferencias se llama externa si corta la línea de los centros en un punto que no está en el segmento determinado por los centros de las circunferencias y se llama interna si la corta en un punto que está en el segmento.

En las figuras siguientes se presenta de forma esquemática los casos en que no tienen tangente común o tienen una o dos tangentes comunes. Se deja al lector que realice las figuras para los casos de tres o cuatro tangentes comunes.

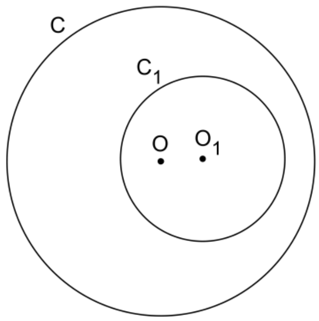


Figura 2.21

Ninguna tangente común

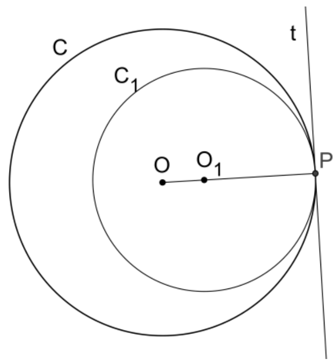


Figura 2.22

Una tangente común

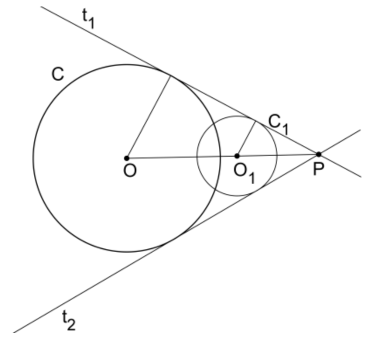


Figura 2.23

Dos tangentes comunes

Para construir una tangente común a dos circunferencias se supondrá que se tiene resuelto el problema.

Sean C y C_1 dos circunferencias con centro en O y O_1 y radios r y r_1 respectivamente. Supongamos que se tiene las dos tangentes externas t_1 y t_2 que se intersecan en P y sean Q y Q_1 los puntos de tangencia de t_1 en C y C_1, respectivamente. Se tiene entonces que $OQ = r$ es perpendicular a t_1 y $O_1Q_1 = r_1$ también, por el teorema 2.4.1; por lo tanto, los radios a los puntos de contacto de la tangente común OQ y O_1Q_1 son paralelos. Si se traza una paralela m_1 a QQ_1 por el punto O_1, se obtiene un rectángulo QQ_1O_1D, donde D es la intersección de m_1 con el radio OQ. Ahora, $OD = r - r_1$ y es perpendicular a m_1. Si se traza una circunferencia C_2 con centro en O y radio $OD = r - r_1$, la recta m_1 es perpendicular a OD, por tanto, es la tangente al círculo C_2 desde O_1.

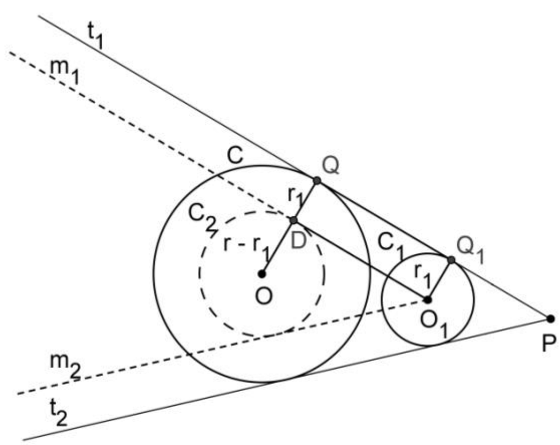


Figura 2.24

La figura es simétrica con respecto a la línea de los centros, por tanto, la tangente m_2 a C_2 desde O_1 es también paralela a la tangente común t_2.

De la situación anterior se puede ver que para construir las tangentes comunes externas se traza una circunferencia C_2 con centro en O, de radio $r - r_1$ y se trazan las tangentes m_1 y m_2 desde O_1 a C_2. Si D y D' son los puntos de contacto de estas tangentes, se trazan los radios OD y OD' y se prolongan hasta que corten a la circunferencia C en Q y R respectivamente. Estos puntos Q y R son los puntos de contacto de las tangentes comunes con C, por tanto, basta trazar las perpendiculares a OQ y OR y se tendrán dos rectas t_1 y t_2 tangentes a la circunferencia C. Resta demostrar que son tangentes a C_1, lo cual se deja como ejercicio al lector.

Actividad 27

Demuestre:

1. La potencia de un punto P con respecto a una circunferencia con centro en el punto O y radio r, es igual a $PO^2 - r^2 = PT^2$, donde PT es la longitud de la tangente desde P a la circunferencia, siempre que P sea exterior al círculo.
2. Las tangentes a una circunferencia desde un punto dado P tienen la misma longitud y forman ángulos iguales con la recta que une el punto y el centro del círculo.
3. El ángulo formado por una tangente y una cuerda que pasa por el punto de tangencia es igual a la mitad del ángulo subtendido por la cuerda.
4. Si dos circunferencias son tangentes, la línea de los centros pasa por el punto de contacto. Recuerde que dos circunferencias son tangentes si son tangentes a la misma recta en el mismo punto.
5. En cualquier triángulo el producto de los dos segmentos en que la altura es dividida por el ortocentro es constante para las tres alturas.
6. Los puntos en que la mediatriz de un lado de un triángulo corta al circuncírculo, están en la bisectriz interior y exterior del ángulo opuesto.
7. El ángulo entre las líneas de Simson de dos puntos P y P' en el circuncírculo del triángulo ABC es igual a un medio del arco PP'.

Actividad 28

1. Trace las tangentes comunes externas e internas a dos circunferencias, considere todos los casos.
2. Inscriba en un círculo dado, un triángulo semejante a un triángulo dado (proposición 2 del Libro IV).
3. Construya un triángulo isósceles tal que cada uno de sus ángulos iguales sea el doble del ángulo restante (proposición 10 del Libro IV).

4. Construya dos puntos que tengan la misma potencia respecto a dos circunferencias dadas.

2.5 El teorema de Ptolomeo y rectas antiparalelas

El teorema siguiente se debe a Claudio Ptolomeo, astrónomo y geógrafo griego de la Antigüedad (siglo II) y aparece en su obra principal conocida por su nombre árabe Almagesto[9]. El Almagesto es una enciclopedia del conocimiento astronómico de esa época, que establece la astronomía como una disciplina de las matemáticas. Esta obra, contiene una elaborada teoría del movimiento de planetas que se movilizan en círculos (epiciclos) que rotan sobre la circunferencia de un círculo mayor cuyo centro se encuentra cercano a la Tierra (sistema geocéntrico). Aborda también la determinación de la distancia de la Luna a la Tierra, estudios sobre la esfera y trigonometría y un manual sobre la construcción y uso de los instrumentos astronómicos.

En la figura 2.25 se presenta un esquema de los epiciclos.

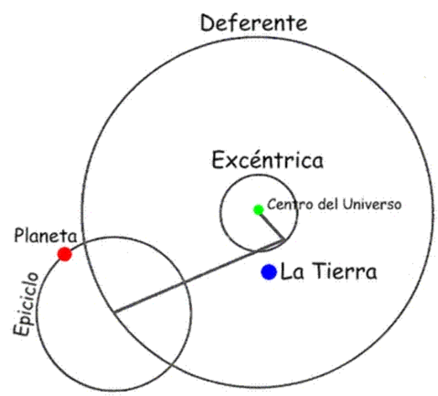


Figura 2.25

Video 6: https://www.youtube.com/watch?v=pgGlIxNVyhw[10]

Video 7: http://www.iac.es/cosmoeduca/relatividad/charlas/historia/ptolomeo.htm[11]

---

[9] Se han referido varios nombres como el original de esta obra: *Megale Syntaxis* (Gran Compendio), *Syntaxis Mathematica* (Compilación Matemática) (Dictionary of Greek and Roman Biography and Mythology, Smith William, 1867, Ancient Library, p. 570). http://www.ancientlibrary.com/.

[10] Sagan, Carl, 1978. *Cosmos: un viaje personal. Capítulo 3: La armonía de los mundos. Ptolomeo y su modelo geocéntrico.* Doblada al español. Turner Home Entertainment en https://www.youtube.com/watch?v=pgGlIxNVyhw.

[11] *Relatividad. Charla IV. El Cosmos Grecolatino*. Cosmoeduca. Instituto de Astrofísica de Canarias en www.iac.es/cosmoeduca/relatividad/charlas/historia/ptolomeo.htm.

El teorema 2.2.3 establece cuando es cíclico un cuadrilátero en término de sus ángulos. ¿Habrá alguna condición que establezca cuando un cuadrilátero es cíclico en término de sus lados?

El teorema de Ptolomeo, que se verá a continuación, establece la condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico en término de sus lados y sus diagonales. Recuerde que se dice que un cuadrilátero es cíclico si es inscriptible, y se dice que sus vértices son concíclicos.

Teorema 2.5.1 (Teorema de Ptolomeo)

Un cuadrilátero es cíclico si y sólo el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos.

Ahora se demostrará solamente, que si el cuadrilátero es cíclico entonces el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos. La demostración del inverso se deja como ejercicio para el lector.

Demostración:

Supóngase que se tiene un cuadrilátero cíclico con vértices *A*, *B*, *C* y *D*. Sean *AC* y *BD* sus diagonales. Sean $\angle CAB = \alpha$ y $\angle BCA = \beta$.

Se traza una recta tal que forme con *AB* un ángulo $\alpha_1 = \alpha$, (Actividad 6,1). Sea *E* el punto de intersección de esta recta con *BD* la diagonal del cuadrilátero, (V postulado).

Se tiene entonces por el teorema 1.5.3, que $\Delta DAE \cong \Delta CAB$, ya que $\alpha_1 = \alpha$, por construcción, y $\angle BCA = \angle BDA = \beta$, por ser ángulos inscritos que abarcan el mismo arco (teorema 2.2.2).

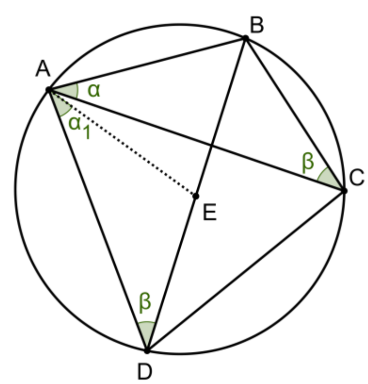


Figura 2.26

Por tanto:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} \Rightarrow AD \times CB = AC \times DE.$$

Se tiene también que $\Delta ADC \cong \Delta AEB$, ya que $\alpha_1 + \gamma = \alpha + \gamma$, por construcción, y $\angle ABE = \angle ACD = \delta$, por ser ángulos inscritos que abarcan el mismo arco.

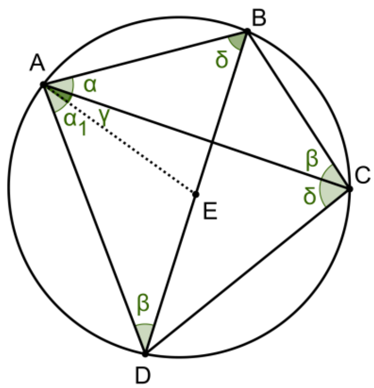


Figura 2.27

Por tanto:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC} \Rightarrow AB \times DC = AC \times EB.$$

Sumando las dos ecuaciones se tiene que:

$$AD \times CB + AB \times DC = AC \times DE + AC \times EB,$$

de donde,

$$AD \times CB + AB \times DC = AC\,(DE + EB),$$

pero como D, E y B son colineales, se tiene que $(DE + EB) = DB$ y,

$$AD \times CB + AB \times DC = AC \times DB$$

¿Es válida esta demostración en el caso de que el ángulo α sea mayor que $\frac{1}{2}\angle DAB$?

Rectas Antiparalelas

Sean *a*, *b* y *c*, *d* dos pares de rectas de tal forma que la bisectriz *m* de las rectas *a* y *b* corta a las rectas *c* y *d* formando ángulos iguales interiores del mismo lado de la transversal, se dice que *c* y *d* son antiparalelas con respecto a las rectas *a* y *b*.

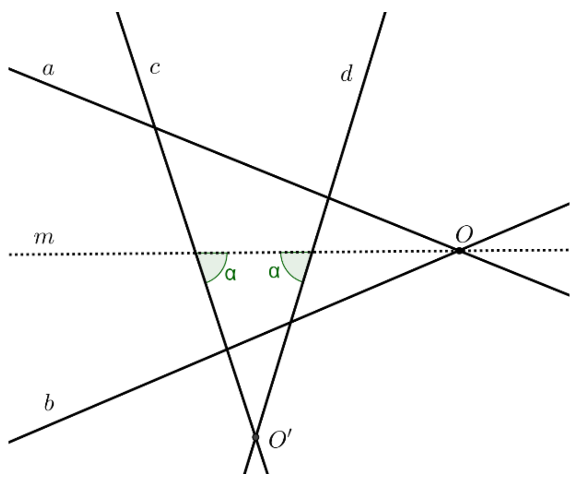


Figura 2.28

Teorema 2.5.2

Si las rectas c y d son antiparalelas con respecto a las rectas a y b, entonces las rectas a y b son antiparalelas con respecto a las rectas c y d.

Demostración:

Sean las rectas *c* y *d* antiparalelas con respecto a las rectas *a* y *b*. Sea *O* el punto de intersección de *a* y *b*. Sea *O′* el punto de intersección de *c* y *d*. Sea *m* la bisectriz de *a* y *b* y sea *n* la bisectriz de *c* y *d*. Sean *A* y *B* las intersecciones de *n* con *a* y *b* respectivamente y sean *C* y *D* las intersecciones de *m* con *c* y *d* respectivamente.

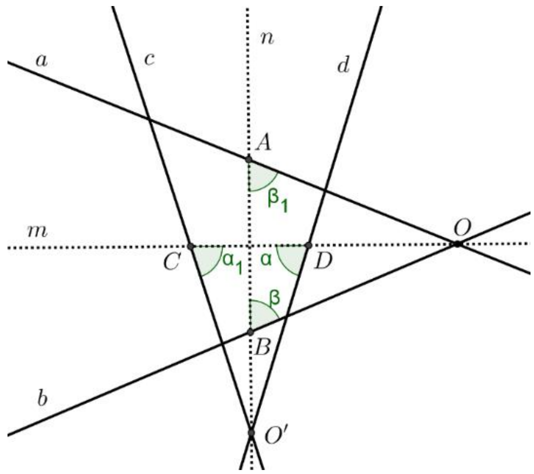


Figura 2.29

Sea α el ángulo formado por *m* y *d* y sea α_1 el formado por *m* y *c*. Por la definición de antiparalelas se tiene que $\alpha = \alpha_1$, por tanto, el $\Delta O'CD$ es isósceles (Actividad 18, 1). Por tanto, la bisectriz *n* de *c* y *d* es altura del lado *CD* y por tanto perpendicular a *m* (Actividad 18, 2). Se tiene entonces que la bisectriz *m* es también altura del ΔOAB y por tanto el triángulo es isósceles (Actividad 18, 4); por tanto, $\beta = \beta_1$, de donde *a* y *b* son también antiparalelas con respecto a las rectas *c* y *d*.

Actividad 29

1. Demuestre que los puntos en que la mediatriz de un lado de un triángulo corta al circuncírculo están en la bisectriz interior y exterior del ángulo opuesto.
2. Demuestre que el punto medio de un lado de un triángulo es también punto medio del segmento determinado por los puntos de contacto del incírculo y el excírculo correspondiente.
3. Demuestre que el área de un triángulo es igual al producto del semiperímetro del triángulo por el radio del círculo inscrito y que también es igual al semiperímetro disminuido en un lado por el radio del excírculo correspondiente.
4. Verifique la demostración del Teorema de Ptolomeo en el caso de que el ángulo α sea mayor que $\frac{1}{2}\angle DAB$.

5. Verifique numéricamente el Teorema de Ptolomeo para cada uno de los siguientes cuadriláteros inscritos en una circunferencia cuyo radio es la unidad:

   a) Un cuadrado.

   b) Un trapecio isósceles uno de cuyos lados es un diámetro y sus otros tres lados son iguales.

   c) Un rectángulo cuyas dimensiones están en la relación 1:2.

6. Demuestre que, al aplicar el Teorema de Ptolomeo a un rectángulo, se obtiene el Teorema de Pitágoras.

7. Demuestre que en cualquier cuadrilátero la suma de los productos de los lados opuestos es mayor o igual que el producto de sus diagonales.

8. Demuestre el inverso del Teorema de Ptolomeo.

9. Demuestre que si dos rectas *a* y *b* que son antiparalelas con respecto a las rectas *c* y *d*, se cortan en cuatro puntos distintos formando un cuadrilátero convexo, estos cuatro puntos son los vértices de un cuadrilátero cíclico. Inversamente, cada par de lados opuestos en un cuadrilátero cíclico convexo es antiparalelo con respecto al otro par.

10. Demuestre que las bisectrices de los dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero cíclico son perpendiculares.

11. Demuestre que los lados no paralelos de un trapecio son antiparalelos con respecto de los lados paralelos.

12. Demuestre que, si *ABC* es un triángulo, *C* el circuncírculo de *ABC*. Una recta paralela a la tangente al circuncírculo en *A*, por un punto *P* en *BC* es antiparalela al lado *BC* con respecto a *AB* y *AC*.

2.6. Las cuerdas de Ptolomeo y algo de trigonometría

Como se ha mencionado, el motor del desarrollo de la ciencia es la búsqueda de respuesta a una sucesión de preguntas y problemas. En el caso de la trigonometría, las preguntas que se hicieron en la antigüedad fueron variadas y de diferente naturaleza. Éstas, estuvieron relacionadas con la navegación, la agrimensura, la generación de mapas y la astronomía, por mencionar las más importantes. En todas ellas, el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa.

La distancia desde una embarcación a un punto determinado de la costa, o la que separa dos astros, eran inaccesibles a la medición directa; en cambio, el ángulo entre la visual dirigida al objeto con otra visual fijada de antemano era fácil de medir mediante instrumentos relativamente sencillos, por lo que estos problemas se resolvían identificando la distancia buscada con el lado de un triángulo y utilizando las magnitudes de los otros lados y/o sus ángulos, así como relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. La búsqueda de estas relaciones es lo que dio origen a la trigonometría.

Aristarco de Samos, 310 - 230 a.n.e. aproximadamente, en su obra *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*, calcula cuántas veces es mayor la distancia de la Tierra al Sol que la de la Tierra a la Luna y encuentra la relación entre los tamaños del Sol, la Tierra y la Luna (Boyer,1968). Para encontrar la relación entre la distancia de la Tierra al Sol y de la Tierra a la Luna, propone que cuando la Luna está en cuarto creciente, es decir, cuando sólo se ve iluminada la mitad de la Luna, el ángulo entre la línea que une la Luna y el Sol y la línea que une la Luna y la Tierra es recto. Así, midió el ángulo entre las visuales a la Luna y al Sol como de 87º (un cuadrante menos $\frac{1}{30}$ de cuadrante), determinó la razón entre *TL* y *TS*, donde *L* es la posición de la Luna, *S* la del Sol y *T* la de la Tierra. La conclusión a la llegó Aristarco es que $\frac{1}{20} < \frac{TL}{TS} < \frac{1}{18}$, esto es, que la distancia del Sol a la Tierra está entre 18 y 20 veces la distancia de la Luna a la Tierra.

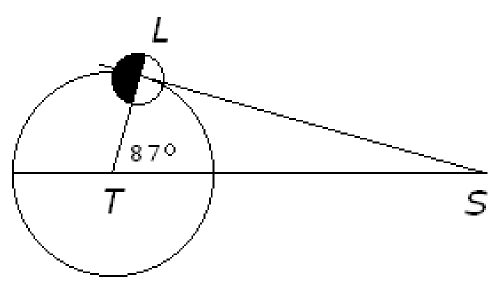


Figura 2.30

En esa época, no se habían desarrollado las tablas trigonométricas, por lo que Aristarco utilizó procedimientos geométricos para llegar a la conclusión mencionada.

A la luz de las propiedades de semejanza de triángulos el resultado anterior es claro, a partir de que los tres ángulos del triángulo con vértices la Tierra, la Luna y el Sol están determinados en ese momento, y por tanto cualquier otro triángulo que tiene estos tres ángulos es semejante y la razón entre *TL* y *TS* es constante, bajo las condiciones mencionadas.

Cabe mencionar que el resultado de Aristarco, aun cuando es mejor que el que Arquímedes atribuyó a Eudoxio, está lejos de ser correcto; la razón entre las distancias mencionadas es cercana a 400. El procedimiento utilizado por

Aristarco es considerado correcto, pero el ángulo que midió como de 87º, es realmente cercano a 89º 50'.

La utilización de procedimientos geométricos como base para cálculos que hoy consideramos trigonométricos fue habitual en la ciencia griega.

El cálculo que realizó Aristarco al respecto de la relación entre la distancia de la Tierra a la Luna y la distancia de la Tierra al Sol, queda claro que lo que determinó fue $\frac{1}{20} < sen\, 3º < \frac{1}{18}$.

Aun cuando fueron varios los astrónomos y matemáticos que trabajaron en problemas similares a los que abordó Aristarco, no se tiene referencia de ningún trabajo de sistematización de los valores de las funciones trigonométricas, o su equivalente, hasta el trabajo de Hiparco de Nicea, 180-125 a.n.e., aproximadamente. Las primeras tablas trigonométricas fueron tablas de cuerdas en un círculo subtendidas por ángulos centrales. En la actualidad se utiliza la función seno (el seno de un ángulo y la longitud de la cuerda que subtiende el ángulo en un círculo están relacionados cercanamente).

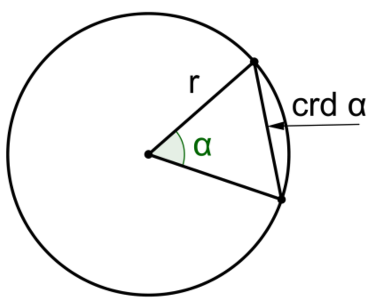


Figura 2.31

Teón de Alejandría en su comentario sobre el texto *Tabla de cuerdas inscritas en un círculo* del *Almagesto* de Ptolomeo, refiere un tratado en doce libros sobre las cuerdas de un círculo, escrito por Hiparco de Nicea. Esta obra se perdió antes de la época de Ptolomeo, y el propio Ptolomeo le da crédito, tanto por su primera tabla de cuerdas como por las observaciones astronómicas que realizó.

Hiparco, siguiendo la tradición babilónica, dividió el ángulo central del círculo en 360 partes iguales, de la misma manera en que se hace hoy en día con los grados. En la tabla calculada por Hiparco se refieren los ángulos múltiplos de 7.5º, entre 0º y 90º. No se tiene certeza sobre el tamaño del radio del círculo que utilizó y se desconoce el método que aplicó. Teón refiere además otro tratado sobre cuerdas en un círculo, escrito en seis libros por Menelao de Alejandría, quien realizó importantes contribuciones a la trigonometría y a la geometría esférica las cuales se presume utilizó para la resolución de problemas de su trabajo astronómico (Boyer, 1968).

Las tablas de cuerdas permitían a los astrónomos emplear métodos de cálculo para determinar por anticipado la posición y el movimiento de los cuerpos celestes.

Fue posteriormente Ptolomeo quien construyó las tablas de cuerdas más completas de la antigüedad, con valores angulares desde medio grado hasta 180 grados, en intervalos de medio grado. Ptolomeo utilizó un círculo de radio 60 para construir estas tablas. La ventaja de utilizar un círculo de radio grande es que se pueden evitar las fracciones. En la actualidad se utiliza un círculo de radio unitario para definir las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, no sólo para los ángulos agudos. Por supuesto que usando un círculo unitario no se evitan las fracciones, pero en la actualidad es fácil trabajar con las fracciones decimales.

Las cuerdas de Ptolomeo

Se puede establecer la relación entre el valor del seno de un ángulo y el de la cuerda que utilizó Ptolomeo en la antigüedad. En primera instancia se establecerá la relación en un círculo unitario.

Sea α un ángulo central en el círculo unitario. Sea *QR* la cuerda que abarca. Se traza *OP* bisectriz del ángulo α, luego, $\angle POQ = (\frac{\alpha}{2})$. Por ser isósceles el triángulo, *OP* es mediatriz (Actividad 18, 2). Sea *Q′* la intersección de *OP* con *QR*. Luego, *Q′* es punto medio de *QR* y es la proyección de *Q* sobre *OP*. Por tanto, $QQ' = \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})$. Se tiene entonces que:

$$\text{crd } \alpha = 2 \operatorname{sen}(\tfrac{\alpha}{2}).$$

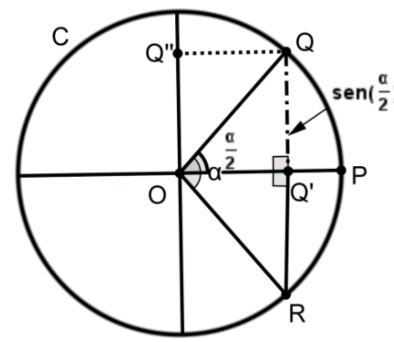


Figura 2.32

Para establecer la relación entre el valor de la cuerda subtendida por un ángulo central en un círculo de radio 60, con el valor de la función seno, hay que multiplicar el lado derecho de la igualdad por 60. Las figuras en un círculo de radio 60, son semejantes a las trazadas en el círculo de radio unitario, con constante de proporcionalidad 60. Por tanto:

$$\text{crd } \alpha = 120 \operatorname{sen}(\tfrac{\alpha}{2}), \text{ o bien } \frac{crd\ \alpha}{120} = sen\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ptolomeo calculó inicialmente las cuerdas de los ángulos de 36º, 60º y 72º utilizando la longitud de los lados de un hexágono regular, un pentágono regular y un decágono regular (Kline; 1972), por lo que antes de entrar a su trabajo veremos algunas propiedades de estos polígonos.

Hexágono

Teorema 2.6.1. El lado de un hexágono regular es igual al radio del círculo circunscrito.

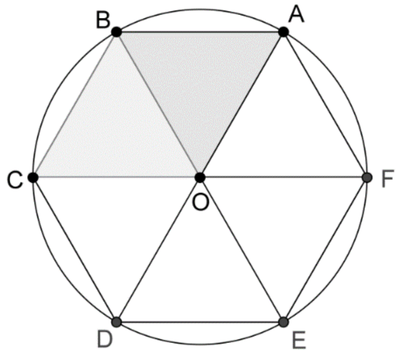


Figura 2.33

Sea *ABCDEF* un hexágono regular, por tanto, *AB* = *BC* = *CD* = *DE* = *EF* = *FA* y sus ángulos interiores son iguales. Más aún, el hexágono regular es inscriptible (Actividad 25, 3).

Sea *O* el centro de la circunferencia que pasa por sus vértices y tracemos los radios a los vértices del triángulo y consideremos los triángulos formados. En la figura se han sombreado dos de ellos: Δ *OAB* y Δ *OBC.* Se tiene entonces que: Δ *OAB* ≅ Δ *OBC*, ya que, *OA* = *OB* y *OB* = *OC*, por ser radios y *AB* = *BC*, por hipótesis.

De manera análoga se puede establecer que cualquiera de los triángulos con un vértice en *O,* el centro del círculo, y cuyos lados son dos radios y un lado del hexágono es congruente e isósceles. Por tanto, los ángulos en el vértice *O* de estos triángulos, son cada uno igual a 60°, son iguales y suman 360°. Por otro lado, ya que los triángulos son isósceles, los ángulos adyacentes a los lados del hexágono son iguales y suman 120°, por tanto, cada uno de ellos es igual a 60° y los triángulos son equiláteros, como queríamos demostrar.

Corolario 1: Los ángulos interiores de un hexágono regular son de 120°.

Corolario 2: Dado un círculo con radio *r*, puede construirse un hexágono regular seleccionando un punto *A* cualquiera sobre el círculo y trazando un diámetro que pasa por *A*, sea *D* el otro extremo del diámetro. Con centro en *A* y radio *AO* se traza una circunferencia que corta a la circunferencia original en *B* y *F*. Con centro en *D* y radio *DO* se traza otra circunferencia que corta el círculo original en *C* y *E*. El hexágono *ABCDEF* es el buscado.

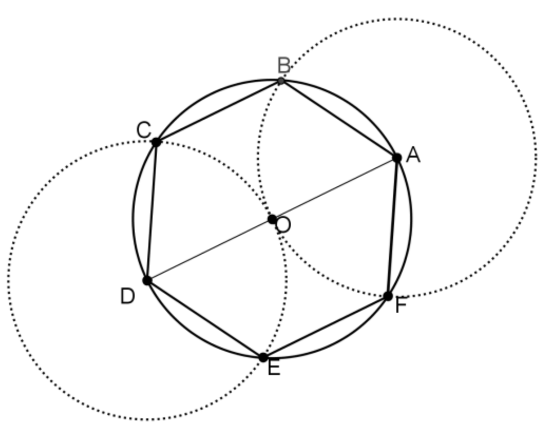


Figura 2.34

Ahora se verán algunas propiedades del pentágono, el hexágono y el decágono que están relacionadas con la razón áurea. En primera instancia se verá la definición y algunas propiedades de la razón áurea o número áureo.

Razón áurea

La definición 3 del Libro Sexto de los Elementos de Euclides propone:

"Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor".

Figura 2.35

Esto se puede expresar como $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$ *donde* $a < b$.

Definición 2.6.1 Dadas dos cantidades a y b tal que a < b, se dice que están en la proporción áurea si $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} = \phi$. *El número* ϕ *es citado de muchas formas: el número áureo, dorado o de oro, razón dorada o áurea, media áurea, proporción áurea o divina proporción, entre ellas.*

De la definición de la proporción áurea se tiene que,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{b}{a}$$

Ya que $\phi = \frac{b}{a}$, se tiene que $\phi = \frac{1}{\phi} + 1 \Rightarrow \phi - 1 = \frac{1}{\phi} \Rightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0$, resolviendo la ecuación cuadrática se tiene que $\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Tomamos el valor positivo de ϕ y es al que llamamos el número de oro y decimos que $\frac{b}{a}$ están en la razón áurea. Además, se tiene que $\phi^2 = \phi + 1$.

Aun cuando varios autores relacionan al número áureo con las dimensiones de estelas babilónicas, de algunos edificios como el Partenón y la Gran pirámide de Giza (Keops), así como con varias obras de arte, en realidad no se tiene certeza sobre la aplicación de esta proporción fue un acto consciente o mera intuición.

El número áureo está ligado con la sucesión de Fibonacci, ya que $\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$, donde F_n es el n-ésimo término de esta sucesión.

Pentágono y razón áurea

Teorema 2.6.2 La diagonal y el lado de un pentágono regular están en la razón áurea.

Demostración:

Sea *ABCDE* un pentágono regular.

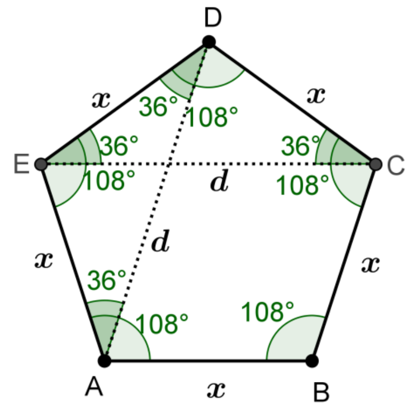


Figura 2.36

Ya que el pentágono es regular todos sus lados son iguales. Llamemos x a su lado.

Asimismo, todos sus ángulos interiores son iguales, por tanto, cada uno de los ángulos interiores es igual a 108°.

Sea d una de las diagonales. Demostraremos que todas las diagonales del pentágono son iguales. Consideremos los triángulos *AED* y *EDC*, cada uno de ellos es isósceles con dos lados iguales a x y el ángulo comprendido entre ellos de 108°.

Por tanto, los triángulos son congruentes y su tercer lado, que en cada triángulo es una diagonal, es igual. Ya que todos los triángulos conformados por dos lados del pentágono y una diagonal son congruentes (LAL), todas las diagonales son iguales. Además, ya que todos estos triángulos son isósceles, los otros dos ángulos son de 36° cada uno.

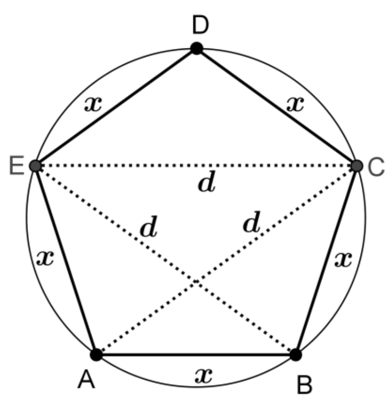


Figura 2.37

Ahora bien, ya que el pentágono es regular, es inscriptible, consideremos el cuadrilátero *ABCE*. Es un cuadrilátero inscriptible, por tanto, aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene que

$$x^2 + xd = d^2 \implies d^2 - xd - x^2 = 0 \implies \frac{d^2}{x^2} - \frac{d}{x} - 1 = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se tiene que:

$$\frac{d}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ahora bien, ya se demostró el teorema, pero analizando la figura 2.38 se tiene que el ΔAED es un triángulo con ángulos 108°, 36° y 36° y tal que sus lados d y x están en la razón áurea. Decimos entonces que es un triángulo áureo. Ya que cualquier triángulo cuyos ángulos son de *108º, 36º y 36º es semejante a este triángulo, sus lados están también en la razón áurea y se le llama un triángulo áureo mayor.*

Ahora bien, si se considera el punto *H*, la intersección de las dos diagonales, se tiene que Δ*AEH* tiene un ángulo igual a 108°- 36° = 72° y tiene otro ángulo igual a 36°; por tanto, su otro ángulo es de 72°, es isósceles y entonces *AH* = *x*.

Además, el Δ*EHD* también tiene sus ángulos de 108°, 36° y 36°.

Por tanto, *EH* = *d* –*x* y el triángulo es semejante al Δ*AED,* ya que sus ángulos son iguales, de donde sus lados también están en la razón áurea y se tiene que $\frac{x}{d-x} = \emptyset$.

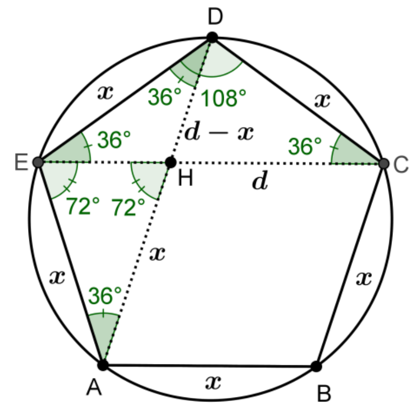


Figura 2.38

Volviendo al Δ*AEH,* por el resultado anterior, sus lados *x* y *d-x* están también en la razón áurea.

Así, cualquier triángulo cuyos ángulos son de *36º, 72º y 72º es semejante a este triángulo y sus lados están también en la razón áurea. A estos triángulos se les llama triángulos áureos menores.*

Corolario 1: Los lados de cualquier triángulo cuyos ángulos son de *108º, 36º y 36º están en la razón áurea.*

Corolario 2: Los lados de cualquier triángulo cuyos ángulos son de *36º, 72º y 72º están en la razón áurea.*

Definición 2.6.2 Un triángulo se llama áureo mayor, si sus ángulos son de 108º, 36º y 36º.

Definición 2.6.3 Un triángulo se llama áureo menor, si sus ángulos son de 36º, 72º y 72º.

Pentágono, hexágono, decágono y la razón áurea

El siguiente teorema que se verá es equivalente a la proposición 9 del libro XIII de Euclides: *"Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono".*

Esta proposición junto con la proposición 10 del mismo libro, que veremos en el Teorema 2.6.4, nos indican cómo dado un círculo se pueden construir el lado del pentágono y el decágono inscrito en el mismo. Posteriormente podremos calcular las cuerdas de los ángulos de 36º, 60º y 72º.

Teorema 2.6.3 El lado de un hexágono y de un decágono regulares e inscritos en la misma circunferencia, están en la razón áurea.

Demostración:

Sea *ABCDEFGHIJ* un decágono regular inscrito en una circunferencia con centro en *O* y radio *r* y sea *AB* uno de sus lados.

El triángulo *OAB* es isósceles, por ser *OA* y *OB* radios de la circunferencia. El ángulo β, opuesto al lado *AB*, es de 36°; por lo tanto, cada uno de los otros dos ángulos es de 72°. Esto es, el triángulo *OAB* es un triángulo áureo menor y por tanto sus lados están en la razón áurea:

$$\frac{r}{AB} = \phi.$$

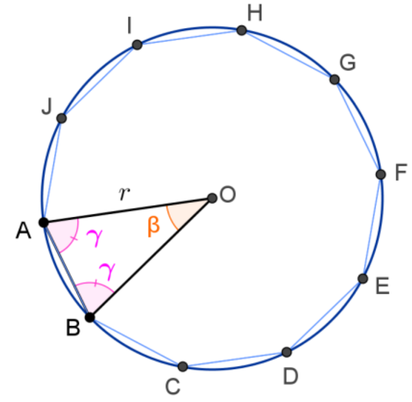


Figura 2.39

Pero si llamamos *x* al lado del hexágono inscrito en la misma circunferencia, se tiene que *x* = *r*, teorema 2.6.1. Esto es, el lado del hexágono y el decágono están en la razón áurea

Teorema 2.6.4 Dado un pentágono regular inscrito en una circunferencia, el cuadrado de su lado es igual a la suma de los cuadrados de los lados de un hexágono y un decágono regulares e inscritos en la misma circunferencia.

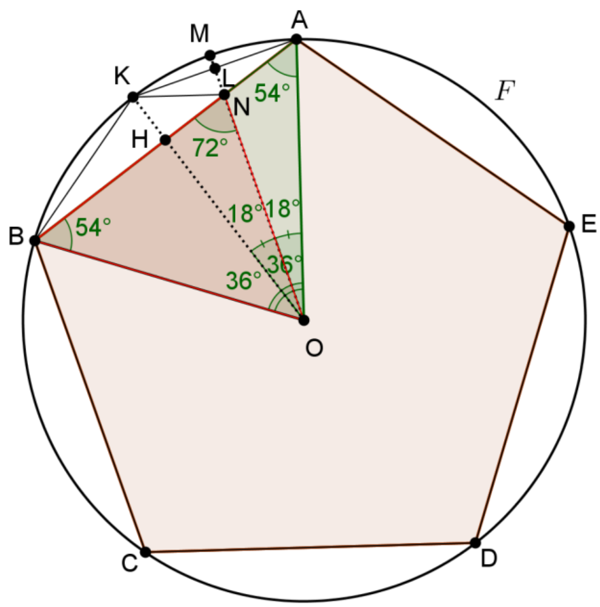


Figura 2.40

Sea *ABCDE* un pentágono regular inscrito en la circunferencia *F*. Sea *O* su centro. Se trazan *OA* y *OB*.

Sea *OH* la perpendicular al lado *AB* del pentágono desde *O* y sea *K* la intersección de *OH* con la circunferencia.

Se trazan los segmentos *KA* y *KB*. Sea *OL* perpendicular a *AK*, sean *N* y *M* las intersecciones de *OL* con *AB* y el arco *AK* respectivamente.

∠*AOB* = 72°, por ser *AB* lado de un pentágono regular. Ya que Δ*ABO* es isósceles, sus ángulos son de 54°, 54° y 72°

Además, *AH* = *HB* y $\widehat{AK} = \widehat{KB}$ ya que *OH* perpendicular a *AB* (Actividad 22, 2). Por tanto, ∠*AOK* = ∠*KOB* = 36° y *AK* y *KB* son lados del decágono regular inscrito.

Pero también se tiene que *ON* es perpendicular a *AK*, por tanto, biseca al $\measuredangle AOK$, a la cuerda *AK*, al arco *AK* y se tiene que $\measuredangle KON = \measuredangle NOA = 18°$. Por tanto, se tiene que en el ΔOBN sus ángulos son de 54°, 54° y 72°, el triángulo es isósceles y los lados iguales son *NB* y *NO.* Ya que los ángulos del ΔABO también son de 54°, 54° y 72°, los dos triángulos son semejantes y se tiene que:

$$\frac{AB}{BO} = \frac{BO}{BN} \quad \Rightarrow \quad AB \times BN = BO^2. \quad \ldots(1)$$

Ahora se demostrará que $\Delta ABK \approx \Delta BFA$.

Para poder analizar adecuadamente la figura, se ha ampliado la parte de la figura 2.40 que se va a utilizar.

En primera instancia es conveniente recordar que los ángulos interiores de un decágono regular son 144°.

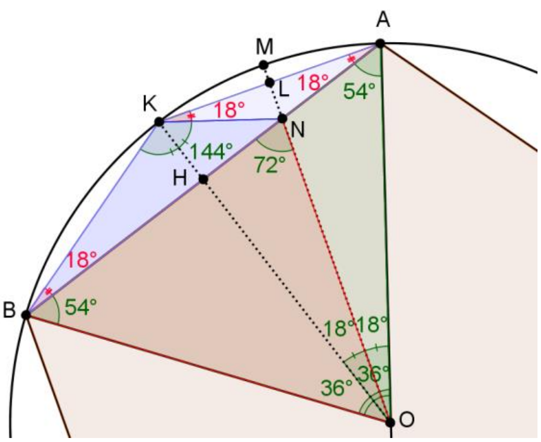


Figura 2.41

El triángulo *ABK* es isósceles, por tanto, sus otros dos ángulos son iguales a 18° cada uno. Además, ya que *ON* es mediatriz de *AK*, se tiene que *NK* = *NA* y el triángulo es isósceles con un ángulo de 18°, por tanto, los otros dos ángulos son 18° y 144°, respectivamente. Los triángulos *ABK y BOA* son equiángulos y por tanto semejantes. De donde:

$$\frac{BA}{AK} = \frac{AK}{NA} \quad \Rightarrow \quad AB \times NA = AK^2. \quad \ldots(2)$$

De (1) y (2) se tiene que $AB\ (BN + NA) = AK^2 + BO^2 \Rightarrow AB^2 = AK^2 + BO^2$, con *AB* lado del pentágono, *BO* del hexágono y *AK* del decágono, como se quería demostrar.

La propiedad que se acaba de demostrar es la proposición 10 del Libro XIII de Euclides. La demostración que se dio es diferente a la de Euclides, ya que se usaron los valores de los ángulos y no la comparación entre los arcos de circunferencia, como lo hizo Euclides.

Cálculo de cuerdas

*Dado un círculo de radio 60, calcular la cuerda del ángulo de 120*º.

Para calcular la cuerda del ángulo de 120º, Ptolomeo utilizó un triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio 60, además del hecho de que el cuadrado de su lado es igual al triple del cuadrado del radio del círculo, que es la proposición 12 del libro XIII de los Elementos de Euclides.

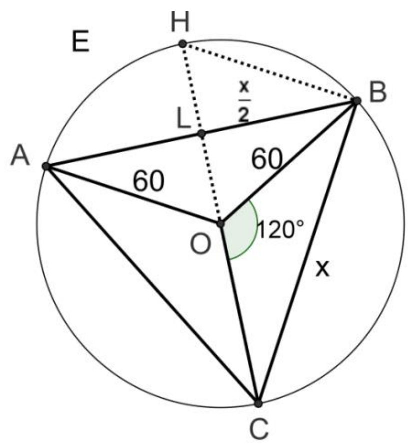


Figura 2.42

Primero se demostrará esta última proposición. Sea *ABC* un triángulo equilátero. Sea *E* el circuncírculo del triángulo. Sea *O* el centro de *E*. Por ser equilátero el triángulo *ABC*, el radio *CO* es la mediatriz de *AB*, ya que tanto *C* como *O* están ésta. Sea *L* la intersección del diámetro por *C* con la recta *AB* y *H* la intersección de este diámetro con el círculo *E*. Por ser *CL* mediatriz de *AB*, *L* es punto medio *AB* y si *x* es la magnitud del lado del triángulo, entonces la longitud de *LB* es $\frac{x}{2}$. Además, *CL* es bisectriz del ∠*BCA*,

Se trazan los radios por *A* y *B*, entonces, $\measuredangle COB = \measuredangle BOA = \measuredangle AOC = 120º$. Se traza la recta *BH*. Se tiene entonces que, $\measuredangle HBA = \measuredangle HCA = 30º$, por ser inscritos, que abarcan el mismo arco y ser *CH* bisectriz del $\measuredangle BCA$. Además, *BO* es mediatriz del segmento *AC* y por tanto bisectriz del $\measuredangle ABC$.

Por tanto, $\measuredangle HBA = \measuredangle ABO = 30°$ y ya que *HL* es perpendicular a *AB*, se tiene que $\Delta HBL \cong \Delta OBL$, por tener sus tres ángulos iguales y un lado común. Por tanto, *HB* = *OB* = *r* y *HL* = *LO* = $\frac{r}{2}$. Si se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo *OBL* o al triángulo *HBL*, se tiene que $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{r}{2})^2 = r^2$, luego $\frac{x^2}{4} + \frac{r^2}{4} = r^2$, de donde $x^2 = 3r^2$. Por tanto, el valor de la cuerda del ángulo central de 120º, en el círculo de radio 60, es igual a $\sqrt{3\,(60)^2} = 103.92304845$.

Dado un círculo de radio 60, calcular la cuerda del ángulo de 90º.

Para calcular la cuerda del ángulo de 90º, Ptolomeo utilizó un cuadrado inscrito en un círculo del mismo radio. En un cuadrado las diagonales son iguales, se bisecan y son perpendiculares; por lo que, en un cuadrado inscrito en un círculo, el punto de intersección de sus diagonales es el centro del círculo. Por tanto, se tiene un triángulo rectángulo con catetos de longitud 60 e hipotenusa igual a 84.85272727, que es la cuerda de un ángulo central de 90º, en un círculo de radio 60.

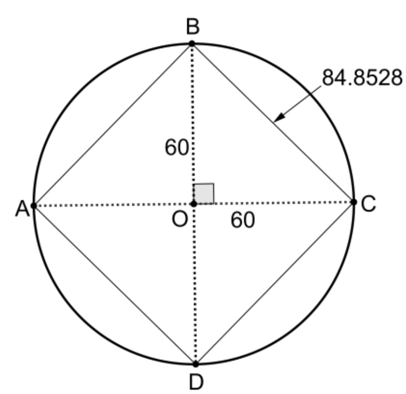


Figura 2.43

Dado un círculo de radio 60, calcular la cuerda de los ángulos de 36º, 60º y 72º.

El cálculo es el realizado por Ptolomeo.

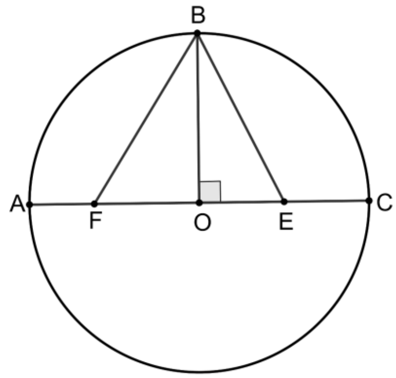


Figura 2.44

Sea un círculo con centro en *O* y radio *OC* = 60, sea *A* el otro extremo del diámetro por *C*, sea *E* el punto medio de *OC*, sea el punto *B* la intersección del círculo con la perpendicular a la recta *AC* por *O* y sea *F* tal que está en el diámetro *AC* y *EF* = *BE*.

BO es igual al lado del hexágono por el teorema 2.6.1. Por otro lado, $BE = \sqrt{30^2 + 60^2} = \sqrt{4{,}500} = 30\sqrt{5}$. Además $CF = FE + EC = 30\sqrt{5} + 30 = 30(\sqrt{5} + 1)$, de donde $\frac{CF}{BO} = \frac{30(\sqrt{5}+1)}{60} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$.

Se tiene entonces que, *OF* es igual al lado del decágono regular inscrito, *BF* es igual al lado del pentágono regular inscrito y *BO* es igual al lado del hexágono regular inscrito. Entonces:

$$crd\,60º = OB = 60 \text{ (radio del círculo)},$$

$$crd\,36º = FO = FE - OE = BE - 30 = \sqrt{(BO)^2 + (OE)^2} - 30 = \sqrt{3{,}600 + 900} - 30 =$$
$$= 37.08203932,$$

$$crd\,72º = BF = \sqrt{(FO)^2 + (OB)^2} = \sqrt{1{,}375.07764013 + 3{,}600} = \sqrt{4{,}975.07764013} =$$
$$= 70.53423027^{12}.$$

Conociendo los valores de las cuerdas para los ángulos ya encontrados, Ptolomeo encontró las longitudes de las cuerdas de otros ángulos usando que el ángulo inscrito en una circunferencia que abarca un diámetro es de 90°.

Dado un círculo de radio 60, calcular las cuerdas de los ángulos de 144º, 108º.

Sea *C* un círculo de radio 60, *AB* un diámetro y ∠*AOA′* = α = 36º. Se traza la cuerda *A′B*, entonces ∠*A′OB* = β = 144º. El ∠*AA′B* = 90º, ya que abarca un diámetro y por tanto,

$$(AA')^2 + (A'B)^2 = (AB)^2 = (120)^2 = 14{,}400,$$

$$(A'B)^2 = 14{,}400 - (37.08203932)^2,$$

$$(A'B)^2 = 114.12694445.$$

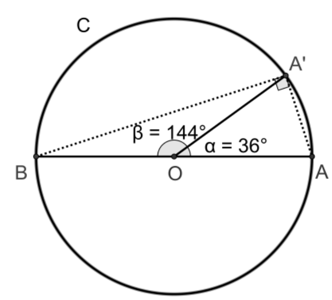


Figura 2.45

En la misma forma calculó el valor para la cuerda de 108º, a partir del valor de la cuerda de 72º.

[12] Ptolomeo realizó estos cálculos en sistema sexagesimal, pero para facilitar la comprensión de las ideas geométricas se utiliza la notación decimal en este texto.

La relación establecida para realizar estos cálculos es equivalente a la igualdad (sen α)^2 + (cos α)^2 = 1. De acuerdo con lo realizado por Ptolomeo, si *AA'* es la cuerda subtendida por un ángulo α menor a 180º y *A'B* la cuerda subtendida por el ángulo suplementario, 180º - α,

$$(AA')^2 + (A'B)^2 = (120)^2.$$

De la relación crd α = 120 $\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})$, se tiene,

$$[120\, sen(\frac{\alpha}{2})]^2 + [120\, sen(\frac{180° - \alpha}{2})]^2 = (120)^2,$$

de donde,

$$[sen(\frac{\alpha}{2})]^2 + [\, sen(90° - \frac{\alpha}{2})]^2 = 1,$$

pero, $\frac{\alpha}{2}$ es un ángulo menor que 90º, por tanto $sen(90° - \frac{\alpha}{2}) = cos\frac{\alpha}{2}$, por tanto,

$$[sen(\frac{\alpha}{2})]^2 + [\, cos(\frac{\alpha}{2})]^2 = 1.$$

En la tabla siguiente se resumen los resultados hasta ahora revisados, en ella se presentan los valores calculados por Ptolomeo[13] para las cuerdas subtendidas por un ángulo central α, y se comparan con el valor del seno del ángulo $\frac{\alpha}{2}$. Se puede observar la precisión con la que fueron calculados estos valores.

Ángulo α	**Cuerda calculada por Ptolomeo[14]**			**Cuerda en notación decimal**	$\frac{Crd\ \alpha}{120}$	**Ángulo $\frac{\alpha}{2}$**	**sen $\frac{\alpha}{2}$** [15]
36º	37	4′	55″	37.08194445	0.30901620	**18º**	0.30901699
60º	60			60	0.5	**30º**	0.5
72º	70	32′	3″	70.53416666	0.58778472	**36º**	0.58778525
90º	84	51′	10″	84.85277777	0.70710648	**45º**	0.70710678
108º	97	4′	56″	97.08222222	0.80901851	**54º**	0.80901699
120º	103	55′	23″	103.92305554	0.86602546	**60º**	0.86602540
144º	114	7′	37″	114.12694443	0.95105787	**72º**	0.95105651

Tabla 2.1

Para deducir el valor de las cuerdas de otros ángulos, encontró una forma de calcular la cuerda subtendida por la diferencia de dos ángulos, utilizando como lema el resultado ahora conocido como Teorema de Ptolomeo.

[13] http://cerebro.xu.edu/math/math147/02f/ptolomy/ptolomytext.html.
[14] Los números están en el sistema sexagesimal que se utilizaba en la época de Ptolomeo. El número que aparece en el primer renglón denota a 37+ 4/60 + 55/(60)^2 en el sistema decimal.
[15] Determinado con calculadora científica.

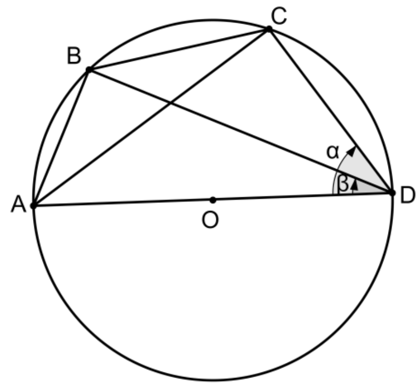


Figura 2.46

Se considera un cuadrilátero cíclico *ABCD*, en el que uno de sus lados es un diámetro, *AD* en el caso de la figura 2.46. Dados los ángulos α y β, inscritos en la circunferencia, que subtienden las cuerdas *AC* y *AB* respectivamente, se requiere calcular el valor de la cuerda BC subtendida por el ángulo (α – β).

Los triángulos *ACD* y *ABD* son rectángulos, por tanto:

$$CD = \sqrt{(AD)^2 - (AC)^2},$$

$$BD = \sqrt{(AD)^2 - (AB)^2}$$

Por el teorema de Ptolomeo,

$$(AD)\,(BC) + (AB)\,(CD) = (AC)\,(BD),$$

por lo tanto,

$$BC = \frac{(AC)(BD) - (AB)(CD)}{AD} = \frac{(AC)\sqrt{(AD)^2 - (AB)^2} - (AB)\sqrt{(AD)^2 - (AC)^2}}{AD},$$

pero *AD* = 120, por ser diámetro de la circunferencia, luego,

$$BC = \frac{(AC)\sqrt{(120)^2 - (AB)^2} - (AB)\sqrt{(120)^2 - (AC)^2}}{120}.$$

La cuerda *BC* puede calcularse a partir de las cuerdas *AB* y *AC*.

Ahora, los ángulos que se consideran son inscritos, pero su relación con los ángulos centrales es clara. El ángulo central que subtiende la cuerda *AC* es 2α, el ángulo central que subtiende la cuerda *AB* es 2β y el que subtiende la cuerda *BC* es $2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta)$.

En esta forma, Ptolomeo calculó las cuerdas de ángulos que son diferencia de dos ángulos, por ejemplo, de 18º = 90º - 72º, 12º = 72º - 60º. En forma análoga encontró la forma de calcular cuerdas de ángulos que son suma de ángulos.

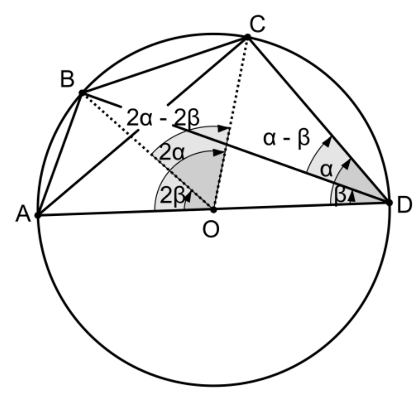


Figura 2.47

Para calcular la cuerda correspondiente a la suma de dos ángulos y la mitad de un ángulo, utilizó métodos análogos y con ellos, y los métodos ya vistos, podía calcular cuerdas de ángulos con intervalos de ¾ de grado. A través de la interpolación los calculó con intervalos de ½ grado.

Aproximadamente dos siglos después de la época de Ptolomeo, en India se desarrolló el concepto de seno de un ángulo como "media cuerda". Asimismo, el concepto de coseno se desarrolló como una forma de computar el seno de ángulos complementarios. Las otras funciones trigonométricas aparecieron siglos después, primero la tangente y cotangente y posteriormente la secante y cosecante. A través de traducciones árabes de los trabajos griegos e hindúes, estos conceptos penetraron en Europa. El primer trabajo europeo importante en esta materia, *De triangulis omnimodis*, fue escrito en el siglo XV por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, conocido como Regiomontano (Maor, 1998).

Es interesante hacer notar que de la antigüedad al siglo XVI, la trigonometría fue desarrollada fundamentalmente por astrónomos y que fue hasta ese siglo, con el trabajo del matemático François Viète, que la trigonometría inicia su camino hacia su carácter analítico moderno, al incorporar el lenguaje algebraico a la trigonometría y finalmente con los trabajos de Newton y Euler, con la utilización de las series de potencias, la trigonometría cambia su carácter de estudio de longitudes de segmentos relacionados con un círculo, al de estudio de relaciones funcionales.

Actividad 30

1. *Construya geométricamente el número áureo. Hint: Puede utilizar un triángulo rectángulo.*
2. *Dado un segmento AB, encuentre un punto C tal que divida al segmento AB en la razón áurea.*
3. *Dado un segmento a, construya el segmento b, tal que* $\frac{a}{b} = \phi$.
4. *Se llama rectángulo áureo a aquel cuyos lados están en la razón áurea. Construye un rectángulo áureo a partir de un segmento de longitud 1.*
5. *Demuestre que*
    a. $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$.
    b. $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$.

Actividad 31

1. *Utilizando los resultados de los teoremas 2.6.1 a 2.6.4, dado un círculo de radio r, construye:*
    a. *Un pentágono inscrito en el círculo.*
    b. *Un decágono inscrito en el círculo.*

Actividad 32

1. *Utilice un cuadrilátero inscrito en el que una de sus diagonales es un diámetro para demostrar:*

$$Sen\ (\alpha + \beta) = (sen\ \alpha)\ (cos\ \beta) + (sen\ \beta)\ (cos\ \alpha).$$

2. *Sea BC un arco en un círculo con diámetro AC y sea D un punto en el arco BC, tal que D biseca al arco BC. Dado el valor de la cuerda BC:*

   a) *Encuentre el valor de la cuerda DC.*

   b) *Demuestre que la expresión obtenida para encontrar este valor es equivalente a:*

$$sen\,(\tfrac{1}{2}\,\alpha)^2 = \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos\alpha).$$

Sugerencia: Trace por D la perpendicular a AC y trace E en AC tal que EF = FC.

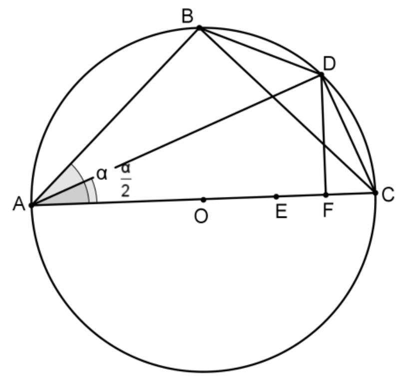


Figura 2.48

3. *Utilizando los resultados de este capítulo y los valores de las cuerdas en el cuadro resumen, calcula el valor de las cuerdas de los siguientes ángulos: 66°, 48°, 24°, 18° y 6°.*

2.7 Apéndice de trigonometría

a) Seno y coseno de un ángulo positivo

Sea *C* una circunferencia de radio 1. Sea α un ángulo positivo. Se traza una semirrecta que forme un ángulo α con la semirrecta horizontal que está en el semiplano derecho que determina la vertical. Sea *Q* la intersección de esta semirrecta con el círculo. Se consideran las proyecciones del punto *Q* sobre las rectas horizontal y vertical. Se llama *Q'* y *Q''* a estos puntos respectivamente, tal y como se indica en las figuras siguientes.

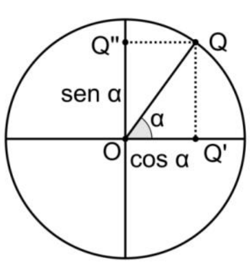


Figura A.1

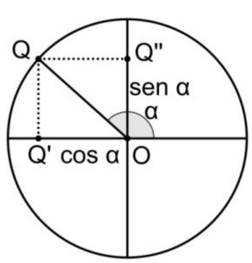


Figura A.2

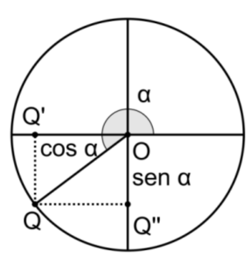


Figura A.3

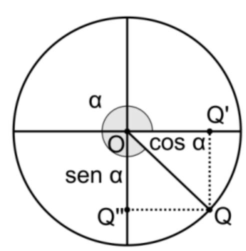


Figura A.4

Se define el sen α como la magnitud del segmento con sentido entre el centro del círculo y la proyección del punto *Q* sobre la recta vertical, *OQ″* en las figuras A.1, A.2, A.3 y A.4.

Se define el cos α como la magnitud del segmento con sentido entre el centro del círculo y la proyección del punto *Q* sobre la recta horizontal, *OQ′* en las mismas figuras.

b) Si α es un ángulo positivo, entonces se tiene:

sen α = sen (α + 360º); en radianes, sen α = sen ($\alpha + 2\pi$),
cos α = cos (α + 360º); en radianes, cos α = cos ($\alpha + 2\pi$),
$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$; también se escribe como $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$

c) Si α es un ángulo positivo, se tiene entonces que:

sen ($-\alpha$) = - sen α y cos ($-\alpha$)= cos α.

d) Si α y β son dos ángulos positivos, tales que $\alpha + \beta = 180º$ ($\alpha + \beta = \pi$), entonces:

sen (β) = sen (α), y cos (β)= -cos (α).

e) Si α es un ángulo positivo, tal que $0° < \alpha < 90º$:

- *sen (180º + α) = -sen (α),*
- *cos (180º + α) = -cos (α),*
- *sen (360º - α) = sen ($-\alpha$) = -sen (α),*
- *cos (360º - α) = cos ($-\alpha$) = cos (α).*

f) Las gráficas de sen y cos:

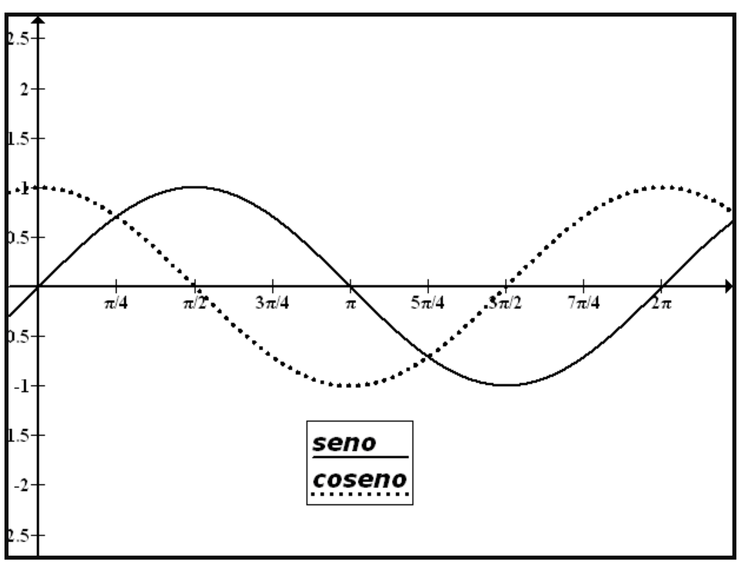


Figura A.5

g) Para construir la gráfica del seno en el intervalo [-2π, 0], basta recordar que sen (-α) = - sen α; esto es, la gráfica del seno en este intervalo es simétrica, con respecto al origen, a la gráfica en el intervalo [0, 2π].

En la figura A.6, aparece la gráfica del seno para el intervalo [-2π, 2π].

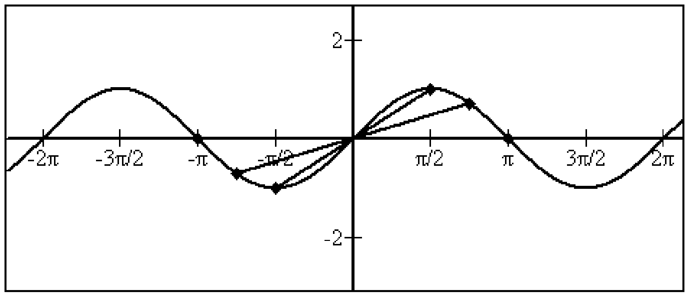


Figura A.6

Para construir la gráfica del coseno en el intervalo [-2π, 0], basta recordar ahora, que cos (-α) = cos α; esto es, la gráfica del coseno en este intervalo es simétrica, con respecto al eje X, a la gráfica en el intervalo [0, 2π].

En la figura A.7, aparece la gráfica del coseno para el intervalo [-2π, 2π].

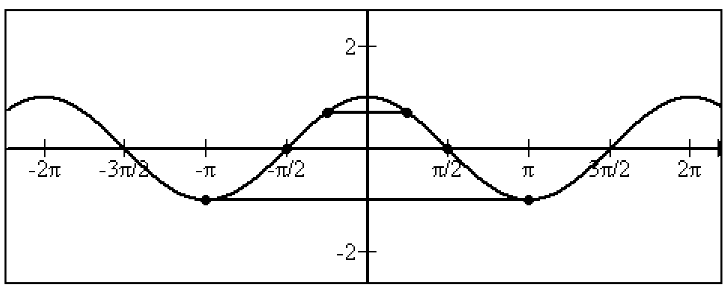


Figura A.7

En la figura A.8, se tienen las gráficas de las dos funciones, seno y coseno, para el intervalo [-2π, 2π].

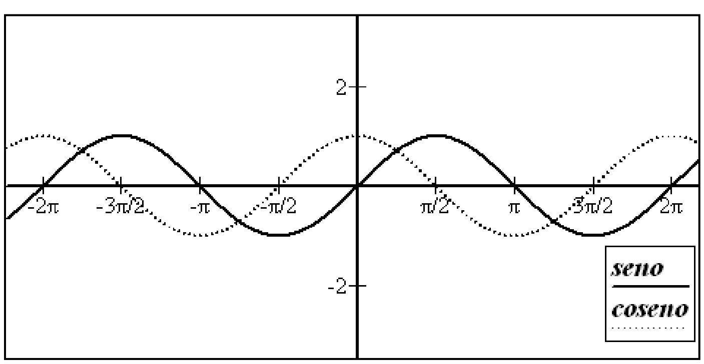


Figura A.8

h) Teorema A.1 (Ley de los Senos)

Si α, β y γ son los ángulos interiores de un triángulo ABC, se tiene entonces que:

$$\frac{BC}{sen\,\alpha} = \frac{AC}{sen\,\beta} = \frac{AB}{sen\,\gamma}.$$

Demostración:

Dado el ΔABC, se analizará primero el caso en que todos los ángulos del triángulo sean agudos. Se traza una de las alturas, *CD* en el caso de la figura A.9. Se tiene que ΔACD y ΔBCD son rectángulos, por tanto:

$$sen\,\alpha = \frac{CD}{AC},\; sen\,\beta = \frac{CD}{BC},$$

de donde, *CD* = *AC* sen α ; *CD* = *BC* sen β ,

y por tanto, $\dfrac{BC}{sen\,\alpha} = \dfrac{AC}{sen\,\beta}$.

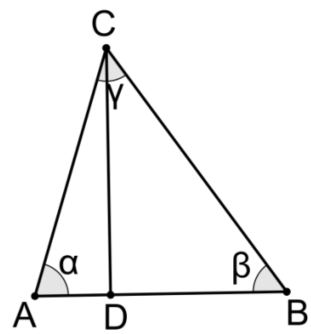


Figura A.9

Para demostrar la igualdad $\dfrac{AC}{sen\,\beta} = \dfrac{AB}{sen\,\gamma}$, se traza la altura por el vértice A y se procede de manera análoga.

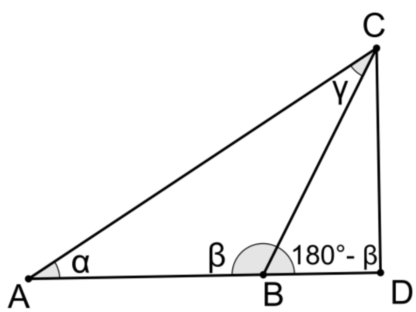


Figura A.10

En el caso en que alguno de los ángulos del ΔABC sea obtuso, sin perder generalidad se puede suponer que es β. Se traza la altura *CD*, figura A.10. Se tiene que ΔACD y ΔBCD son rectángulos y por tanto:

$$sen\,\alpha = \frac{CD}{AC};\; sen\,(180° - \beta) = \frac{CD}{BC},$$

de donde,

CD = *AC* sen α ; *CD* = *BC* sen (180º- β) .

Pero, sen β = sen (180º - β), y por tanto

$$\frac{BC}{sen\,\alpha} = \frac{AC}{sen\,\beta}.$$

Para demostrar la igualdad $\dfrac{AC}{sen\,\beta} = \dfrac{AB}{sen\,\gamma}$, se procede como en el caso anterior.

i)Teorema A.2 (Ley de los Cosenos)

Si α, β y γ son los ángulos interiores de un triángulo ABC, entonces se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos\alpha,$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos\beta,$$

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2(AC)(BC)\cos\gamma.$$

Demostración:

Se analizará primero el caso de que todos los ángulos del ΔABC sean agudos. De acuerdo con los resultados de la Actividad 8, 2 en todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. Se traza una de las alturas, *CD* en el caso de la figura A.11.

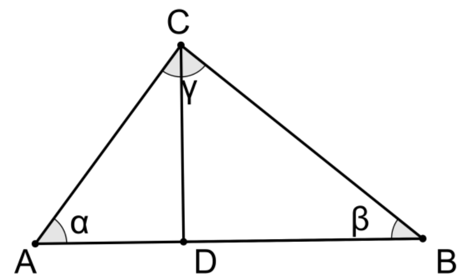


Figura A.11

Se tiene entonces que:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AD),$$

ya que, *AD* es la proyección de *AC* sobre *AB*.

El ΔACD es rectángulo, por tanto:

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AC},$$

de donde,

$$AD = AC\cos\alpha;$$

por tanto,

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos\alpha,$$ como se quería demostrar.

La demostración de las otras dos igualdades, para este caso, se puede obtener renombrando los vértices y los ángulos.

En el caso de que alguno de los ángulos del ΔABC sea obtuso, de acuerdo con los resultados de la Actividad 8, 2, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Se puede suponer que α es el ángulo obtuso. Se traza la altura por el punto *C*. Sea *D,* el pie de la altura (figura A.12).

Se tiene entonces que:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 + 2(AB)(AD),$$

ya que, *AD* es la proyección de *AC* sobre *AB*.

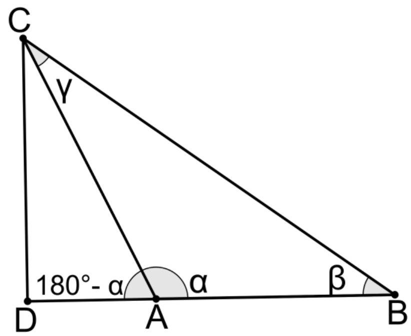


Figura A.12

El ΔACD es rectángulo, por tanto:

$$cos\ (180° - \alpha) = \frac{AD}{AC},$$

de donde, $AD = AC \cos (180° - \alpha)$.

Pero se tiene que,

$$cos\ (180° - \alpha) = -\ cos\ \alpha.$$

Luego, $AD = -\ AC \cos (\alpha)$.

Por tanto:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 + 2(AB)\ (-AC \cos \alpha)$,

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)\ (AC) \cos \alpha$,

como se quería demostrar.

j) En los casos siguientes, supóngase que se tiene un ΔABC, con ángulos interiores α, β y γ, opuestos a los lados BC, AC y AB, respectivamente, como lo indica la figura A.13. Aun cuando la figura no lo indica, alguno de los ángulos puede ser obtuso.

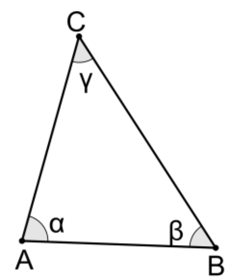


Figura A.13

i) Sean $AC = 5$, $\alpha = 70º$ y $\beta = 30º$. Encuentre la magnitud del otro ángulo y los otros dos lados.

Ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º, $\gamma = (180º - (30º+70º)) = 80º$.

Por la ley de los senos:

$$\frac{5}{sen\ 30°} = \frac{BC}{sen\ 70°} = \frac{AB}{sen\ 80°},$$

$BC = \frac{5\ sen\ 70°}{sen\ 30°}$, $AB = \frac{5\ sen\ 80°}{sen\ 30°}$,

$BC = \frac{5\ (0.939692)}{0.5}$, $AB = \frac{5\ (0.984807)}{0.5}$,

$BC = 9.39692$. $AB = 9.84807$.

ii) Sean $AC = 5$, $AB = 7$ y $\alpha = 30º$. Encuentre la magnitud del otro lado y los otros dos ángulos.

Por la ley de los cosenos:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC) \cos \alpha$,

$(BC)^2 = (7)^2 + (5)^2 - 2(7)(5)(0.866025)$,

$(BC)^2 = 13.37825$,

$BC = 3.657629$.

iii)Sean $AC = 15$, $AB = 23$ y $\beta = 30º$. Encuentre la magnitud del otro lado y los otros dos ángulos.

En este caso no es aplicable la ley de los cosenos, ya que el ángulo que se conoce no es el opuesto al lado que se busca. Si se aplica la ley de los senos se tiene:

$$\frac{15}{sen\ 30°} = \frac{BC}{sen\ \alpha} = \frac{23}{sen\ \gamma},$$

luego,

$$15 \text{ sen } \gamma = 23 \text{ (sen } 30º),$$

de donde, sen $\gamma = 0.76667$.

Entonces, $\gamma = 50º$, pero ya que sen (180º-50º) = sen (50º), $\gamma_2 = 130º$, satisface también la ecuación. En el caso que $\gamma = 50º$, se tiene que $\alpha = 100º$ y en el caso de que $\gamma_2 = 130º$, se tiene $\alpha_2 = 20º$. Ahora, de la igualdad,

$$BC = \frac{23\ sen\ \alpha}{sen\ \gamma},$$

se obtienen dos valores para la magnitud de *BC,*

$$BC = 29.5682 \text{ y } (BC)^2 = 10.2689.$$

iv) Sean *P* y *Q* dos objetos inaccesibles, pero visibles desde *A* y *B*. Calcule la distancia entre *P* y *Q*, si se tiene $\alpha = 44.58º$, $\beta = 38.37º$, $\gamma = 43.72º$, $\delta = 42.92º$ y $AB = 452$, figura A.14.

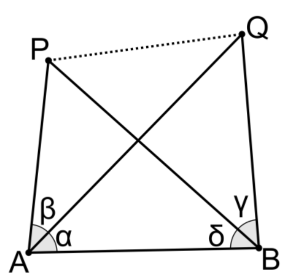


Figura A_14

Se considera el triángulo *PAB*, dos de sus ángulos son $\alpha+\beta$ y δ, por tanto, $\angle APB = 54.13º$. Por la Ley de los Senos,

$$\frac{PA}{sen(42.92°)} = \frac{PB}{sen(82.95°)} = \frac{452}{sen(54.13°)},$$

por tanto,

$$PA = \frac{452\ (sen\ 42.92°)}{sen\ (54.13°)} = \frac{452\ (0.680976)}{0.810348} = 379.84$$

$$PB = \frac{452\,(sen\,82.95°)}{sen\,(54.13°)} = \frac{452\,(0.992439)}{0.810348} = 553.57$$

Se considera el triángulo *QAB*, dos de sus ángulos son α y $\delta+\gamma$, por tanto, $\angle AQB$ =48.78º. Se aplica nuevamente la Ley de los Senos y se obtiene *QA* = 599.88 y *QB* = 421.79.

La longitud *PQ* se puede calcular aplicando la Ley de los Cosenos ya sea al ΔPQA o al ΔPQB, de los cuales se conocen dos de sus lados y el ángulo opuesto al lado que no se conoce. Si se calcula en el ΔPQA,

$(PQ)^2 = (PA)^2 + (QA)^2 - 2(PA)(QA)\cos\beta$

$(PQ)^2 = (379.84)^2 + (599.88)^2 - 2(379.84)\,(599.88)(0.784018)$

$(PQ)^2 = 144{,}278.43 + 359{,}856.01 - 357{,}290.20 = 146{,}844.24$

$PQ = 383.20$.

v) Calcule el área de un triángulo en función de sus lados y sus ángulos.

Se realizará el cálculo para el caso de un triángulo acutángulo y los otros casos, rectángulo y obtusángulo, se dejan como ejercicio.

Sea ΔABC un triángulo acutángulo. Para calcular el área del triángulo se traza por uno de sus vértices una altura, *C* y h_1, en el caso de la figura A.15. Luego, si *K* es el área del triángulo:

$$K = \frac{(AB)h_1}{2}.$$

Pero, $h_1 = (AC)$ sen α, entonces,

$$K = \frac{(AB)(AC)sen\,\alpha}{2}.$$

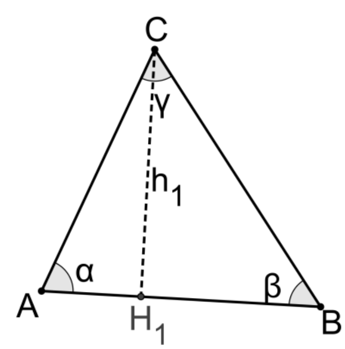


Figura A_15

De manera análoga se puede demostrar que,

$$K = \frac{(AB)(BC)sen\,\beta}{2} \text{ y } K = \frac{(AC)(BC)sen\,\gamma}{2}.$$

k) Teorema de la Bisectriz generalizada

Sea ABC cualquier triángulo y CL una recta cualquiera que pasa por el vértice C. Sean α_1 y α_2 los ángulos determinados por AL con AC y BC respectivamente. Demuestre que:

$$\frac{AL}{LB} = \frac{AC\ sen\ \alpha_1}{BC\ sen\ \alpha_2}.$$

Demostración:

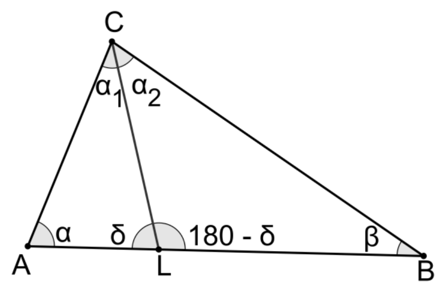


Figura A_16

Si se aplica la Ley de los Senos a los triángulos *ALC* y *LBC* se tiene:

$$\frac{AL}{sen\alpha_1} = \frac{AC}{sen\ \delta}, \quad \frac{LB}{sen\alpha_2} = \frac{BC}{sen\ (180 - \delta)}.$$

Despejando *AL* y *LB* de estas ecuaciones,

$$AL = \frac{AC\ sen\ \alpha_1}{sen\ \delta},\ LB = \frac{BC\ sen\ \alpha_2}{sen\ (180° - \delta)}.$$

Pero, sen δ = sen (180º - δ), de donde, $\frac{AL}{LB} = \frac{AC\ sen\ \alpha_1}{BC\ sen\ \alpha_2}$.

Actividad 33

1. *Sea ABC un triángulo y P un punto sobre el lado AB, demuestre que:*

$$(AB)\ (CP)^2 + (AP)(PB)(AB) = (AP)\ (BC)^2 + (PB)(AC)^2$$

Este resultado se conoce como el Teorema de Stewart.

2. *Dado un triángulo ABC, calcule la longitud de sus medianas.*
3. *Dado un triángulo ABC, calcule la longitud de sus bisectrices.*
4. *Sean P y Q dos objetos inaccesibles, pero visibles desde A y B, como en la figura A.14. Calcule la distancia entre P y Q, si se tiene que α = 48.58º, β = 41.87º, γ = 54.72º, δ = 42.78º y AB = 256.*
5. *Sea ΔABC, con ángulos interiores α, β y γ, opuestos a los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea r el radio del circuncírculo del ΔABC. Demuestre que* $\frac{BC}{sen\ \alpha} = \frac{AC}{sen\ \beta} = \frac{AB}{sen\ \gamma} = 2r.$
6. *Demuestre que si ΔABC es isósceles y P un punto cualquiera en la base BC del triángulo, entonces ΔABP y ΔACP tienen circuncírculos con radios iguales.*

UNIDAD TRES

Introducción a la Geometría Moderna

3.1. Segmentos dirigidos
3.2 Razón en que un punto divide a un segmento
3.3 Puntos al infinito
3.4 Puntos armónicos
3.5 Ángulos dirigidos
3.6 Rectas armónicas
3.7 Homotecia
3.8 Circunferencias homotéticas

3.1. Segmentos dirigidos

Dados dos puntos distintos *A* y *B*, hasta ahora, cuando se ha hablado del segmento *AB*, se ha considerado únicamente su longitud. En adelante, se considerará no solamente su longitud sino también su sentido. De esta forma se denominará como segmento dirigido *AB* al que se extiende de *A* hacia *B* y como segmento dirigido *BA* al que se extiende de *B* hacia *A*.

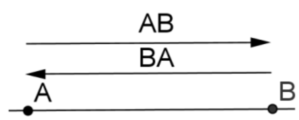


Figura 3.1

Los segmentos *AB* y *BA* son iguales en magnitud, pero opuestos en sentido, lo cual se expresará en la forma algebraica siguiente:

$$AB = -BA, \text{ o bien como } AB + BA = 0.$$

Esta identidad es independiente del sentido que se considere positivo en la recta.

Teorema 3.1.1 Si A, B y C son tres puntos colineales, entonces:

$$AB + BC + CA = 0,$$

para cualquier orden de los puntos A, B y C.

Demostración:

Primero se demostrará que $AB + BC = AC$:

a) Si *B* y *C* están en semirrectas diferentes determinadas por el punto *A*, esto es *A* está en medio de *B* y *C* se tiene que *AB* y *AC* tienen sentidos opuestos y que *AC* y *BC* tienen el mismo sentido

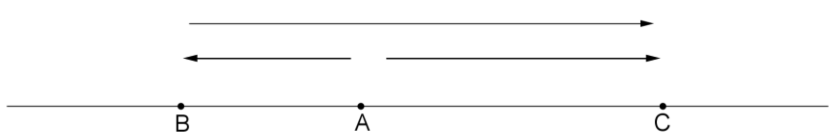


Figura 3.2

por lo tanto, $AB + BC = -BA + BC = AC$. Independientemente de la semirrecta en que están *B* y *C*, la demostración es la misma, siempre y cuando *A* esté en medio.

b) Si *B* y *C* están en la misma semirrecta determinada por el punto *A*, y *C* está en medio de *AB* se tiene que *AB* y *AC* tienen el mismo sentido y que *AC* y *BC* tienen sentido opuesto.

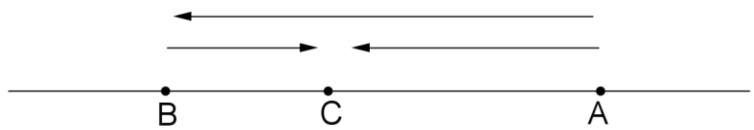


Figura 3.3

por lo tanto, $AB + BC = AB - CB = AC.$ La demostración es análoga para el caso en que B está en medio de A y C.

Observe que en el caso de que no se estén considerando los segmentos dirigidos la fórmula $AB + BC = AC$ sólo es válida cuando B está en medio de A y $C.$ Pero si se consideran los segmentos dirigidos, en todos los casos $AB + BC = AC$ y por tanto, $AB + BC + CA = AC + CA = 0$.

Otra propiedad que hay que hacer notar, cuando se habla de segmentos dirigidos es que si $AB = AC,$ entonces $B = C$, lo que no sucede si no hablamos de segmentos dirigidos.

Teorema 3.1.2 Si A, B, C y D son cuatro puntos colineales, entonces:

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

A esta identidad se le conoce como Teorema de Euler.

Demostración:

Ya que $AB + BC = AC,$ para cualesquiera tres puntos colineales A, B y C,

$$AB = AD + DB,\ AC = AD + DC \text{ y } BC = BD + DC.$$

De estas tres igualdades se obtiene

$$AB = DB - DA,\ AC = DC - DA \text{ y } BC = DC - DB,$$

por lo que se tiene:

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = (DB - DA)\ CD + (DC - DA)\ DB + (DC - DB)AD$$

$$= DB \cdot CD - DA \cdot CD + DC \cdot DB - DA \cdot DB + DC \cdot AD - DB \cdot AD,$$

y reagrupando,

$DB\ (CD + DC) - DA\ (CD + DC) - DB\ (DA + AD) = DB\ (0) - DA\ (0) - DB\ (0) = 0,$ como se quería demostrar.

3.2. Razón en que un punto divide a un segmento

Definición 3.2.1. Dado un segmento dirigido AB y un punto P, distinto de A y B, en la recta que determinan A y B, se define la razón en que el punto P, distinto de los puntos A y B, divide a un segmento AB como:

$$r = \frac{AP}{PB}.$$

En la figura 3.4, *AB* = 8 y *AP* = 6.

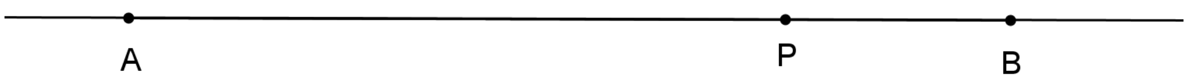


Figura 3.4

Para encontrar la razón en que *P* divide al segmento *AB*, se tiene que calcular el valor de *PB*, pero como *AP* + *PB* = *AB*, se tiene que 6 + *PB* = 8, *PB* = 2 y $r = \frac{6}{2} = 3$.

Note que para cualquier punto *P* en el interior del segmento *AB*, los sentidos de *AP* y *PB* son iguales y por tanto la razón *r* es positiva. Se dice que *P* divide al segmento *AB* internamente.

Se puede observar que independientemente del sentido positivo de la recta, en este caso la razón es positiva, ya que, si el sentido de *AP* y *PB* es el mismo que el sentido positivo de la recta, entonces los dos segmentos son positivos y en caso contrario, los dos son negativos y por tanto la razón *r* también es positiva. Por lo tanto, el valor de *r* no depende del sentido considerado positivo en la recta, lo importante es si los segmentos considerados para calcular esta razón tienen o no el mismo sentido.

Ahora bien, si se consideran los valores del ejemplo anterior y se quiere encontrar la razón en que *P* divide al segmento *BA*, se tiene entonces que

$$r' = \frac{BP}{PA} = \frac{-PB}{-AP} = \frac{PB}{AP} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Es fácil demostrar en general que, si *P* divide al segmento *AB* en la razón *r*, entonces divide al segmento *BA* en la razón $\frac{1}{r}$.

Esta última observación indica, además que, si no se consideran los segmentos dirigidos, la razón en que un punto divide a un segmento no tiene significado, ya que se pueden tener dos valores diferentes.

Si M es el punto medio del segmento AB, entonces $AM = MB$ y $\frac{AM}{MB} = 1$.

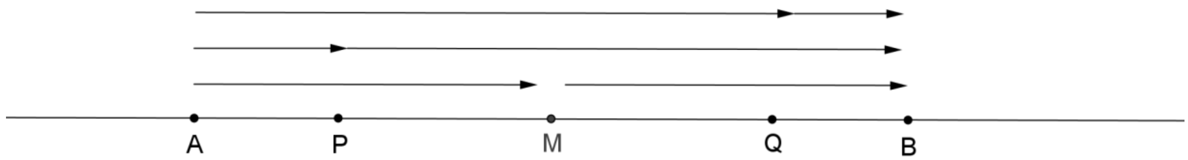


Figura 3.5

Si P está en el segmento AM, entonces $AP < PB$ y se tiene que $\frac{AP}{PB} < 1$, aunque nunca es 0, si $P \neq A$. Se puede observar que mientras menor es AP, PB es mayor y por tanto r es menor. Dicho de otra manera, mientras más se acerca P a A, r se acerca más a 0 y si P se acerca a M, entonces r se acerca a 1.

Ahora, si Q está en el segmento MB, entonces $AQ > QB$ y $\frac{AQ}{QB} > 1$. Se puede observar que mientras mayor es AQ, QB es menor y por tanto r es mayor. Dicho de otra manera, mientras más se acerca Q a B, r crece y si Q se acerca a M, entonces r se acerca a 1. Una pregunta que se puede hacer es si para este caso r puede tomar cualquier valor positivo mayor que 1. Esto se verá en el Teorema 3.2.2.

Si P está en el exterior de un segmento AB se dice que P lo divide externamente y la razón es negativa.

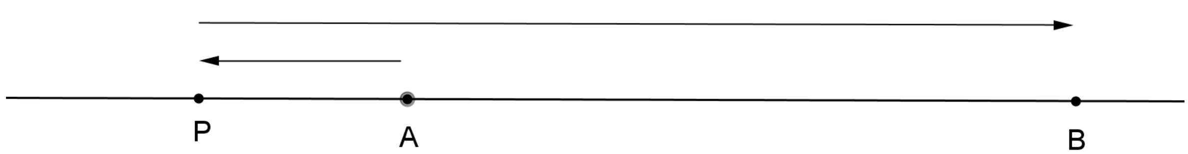


Figura 3.6

Se considera primero el caso en que P y B están en diferentes semirrectas determinadas por A, como en la figura 3.6. AP y PB tienen diferentes sentidos. Además, $PB = PA + AB$, por lo tanto:

a) $r = \frac{AP}{PB}$ es negativa, ya que AP y PB tienen diferentes sentidos.

b) $r = \frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PA+AB}$ y $|AP| < |PA + AB|$ y por tanto $\left|\frac{AP}{PA+AB}\right| < 1$. Esto indica que en este caso $-1 < r < 0$.

Ahora, si *P* es externo al segmento *AB* y *P* y *B* están en la misma semirrecta determinada por *A*, como en la figura 3.7.

Figura 3.7

AP y *PB* tienen diferentes sentidos. Además, *AP* = *AB* + *BP,* por lo tanto:

a) $r = \frac{AP}{PB}$ es negativa, ya que *AP* y *PB* tienen diferentes sentidos.

b) $r = \frac{AP}{PB} = \frac{AB+BP}{PB}$ es tal que $|AB + BP| > |PB|$ y por tanto $\left|\frac{AB+BP}{PB}\right| > 1$. Esto indica que en este caso r < -1.

Ahora, también se puede preguntar si para este caso *r* puede tomar cualquier valor negativo menor que -1. Esto, como ya se ha dicho, se verá en el Teorema 3.2.2.

Teorema 3.2.1 Sean P y Q son dos puntos en la recta determinada por los puntos A y B. Si P y Q dividen al segmento AB en la misma razón r ≠ -1, entonces coinciden.

Demostración:

Sean *P* y *Q* tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} = r$, por tanto, se tiene que

$$AP = r\,PB \quad \ldots(1)$$
$$AQ = r\,QB \quad \ldots(2).$$

Pero, además,

$$AP + PB = AB \ldots(3)$$
$$AQ + QB = AB \ldots(4).$$

De (3) y (4) se tiene,

$$PB = AB - AP,$$
$$QB = AB - AQ.$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1) y (2) se tiene que:

$$AP = r\,(AB-AP), \ldots(5)$$
$$AQ = r\,(AB-AQ) \ldots(6).$$

De (5) y (6) se obtiene:

$$AP = r\,AB - r\,AP \Rightarrow AP + r\,AP = r\,AB \Rightarrow AP = \frac{r\,AB}{1+r}.$$
$$AQ = r\,AB - r\,AQ \Rightarrow AQ + r\,AQ = r\,AB \Rightarrow AQ = \frac{r\,AB}{1+r}.$$

Por tanto, $AP = AQ$ y los puntos P y Q coinciden por la definición de segmentos dirigidos. Cabe mencionar que las dos expresiones tienen sentido siempre y cuando $1 + r \neq 0$, lo cual sucede siempre que $r \neq -1$, tal y como lo afirma la hipótesis del Teorema.

Teorema 3.2.2 Dado un segmento AB y r ≠ -1, entonces existe un punto P que divide al segmento en la razón r.

Demostración:

Sea r un real, $r \neq -1$ y sea AB un segmento. Si P divide al segmento AB en la razón r se tiene,

$$\frac{AP}{PB} = r \Rightarrow AP = r\,PB, \quad \ldots(1)$$

además,

$$AP + PB = AB \Rightarrow AP = AB - PB \ldots(2).$$

Sustituyendo el valor de AP de (2) en (1),

$$AB - PB = rPB \Rightarrow AB = PB\,(r + 1) \Rightarrow PB = \frac{AB}{r+1}.$$

Esta ecuación nos da el valor de PB y tiene solución siempre y cuando $1 + r \neq 0$, lo cual sucede si y sólo si $r \neq -1$, tal y como lo afirma la hipótesis del Teorema.

De acuerdo con los resultados de los dos teoremas anteriores para cada segmento AB y cada $r \neq -1$, existe un único punto P, tal que $\frac{AP}{PB} = r$. Si $r > 0$, el punto P está el interior del segmento AB y si $r < 0$, y $r \neq -1$, el punto P está el exterior del segmento AB.

¿Qué punto divide al segmento AB en la razón $r = 0$?

Sea P el punto que divide al segmento AB en la razón $r = 0 \Rightarrow r = \frac{AP}{PB} = 0$ y por tanto $AP = 0 \Rightarrow P = A$. Análogamente si $P = A$, $AP = 0 \Rightarrow r = 0$. Esto es, P divide al segmento AB en la razón $r = 0 \Leftrightarrow P = A$.

En el caso que $P = B$, se tiene que $PB = 0$ y la razón es indeterminada.

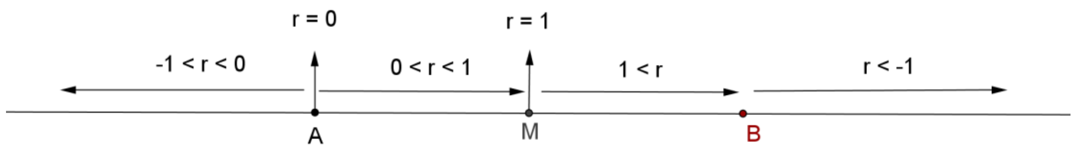


Figura 3.8

De acuerdo con los resultados anteriores se tiene que, dado un segmento *AB*, a cualquier punto *P* en la recta que determinan, con excepción de *B,* se asocia la razón *r* en que ese punto divide al segmento *AB*. Asimismo, para cada número real $r \neq -1$, existe un único punto en la recta *AB* que divide al segmento *AB* en esa razón.

Definición 3.2.2. Si P es un punto, distinto de A y B, que divide un segmento dado AB en una razón r (independientemente que r sea positiva o negativa) y Q divide al mismo segmento en la razón –r, se dice que Q es el conjugado armónico de P con respecto a AB.

Esta definición es equivalente decir que:

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}.$$

En la sección 4 de este capítulo se analizará más a fondo esta relación, por lo pronto solamente se hará notar que dado cualquier punto *P*, distinto de *A* y *B,* tiene conjugado armónico, con respecto a *AB*, con excepción del punto medio del segmento, ya que no hay un punto que divida al segmento en la razón -1.

Actividad 34

1. Generalice la ecuación del teorema 3.1.1 para más de 3 puntos colineales.
2. Si la longitud de *AB* es de 8 unidades, encuentre los puntos *P* y *Q* que lo dividen en la razón 24 y -24, respectivamente.
3. Demuestre que si *A, B* y *C* son tres puntos colineales y *D* es cualquier otro punto en el plano, entonces:

   $$DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0.$$

   Sugerencia: Considere Primero el caso de que *D* está en la recta *ABC.* Después dibuje desde *D* la perpendicular a la recta.

4. Demuestre que si *A, B* y *C* son tres puntos colineales y *P, Q* y *R* son los puntos medios de *BC, CA y AB* respectivamente, entonces el punto medio de *CR* coincide con el punto medio de *PQ.*

5. Dado un segmento *AB* y un número $r \neq -1$ y $r > 0$, realice una construcción geométrica para determinar los puntos *P* y *Q* que dividen al segmento *AB* en las razones *r* y *–r* respectivamente.

6. Suponiendo que *A*, *B* y *P* son tres puntos colineales tales que $r = \frac{AP}{PB}$, encuentre los valores de $\frac{BP}{PA}$, $\frac{AB}{BP}$, $\frac{PB}{BA}$, $\frac{BA}{AP}$ y $\frac{PA}{AB}$.

7. Sean *m* y *n* dos rectas cualesquiera y sean *A*, *B* y *C* tres puntos en *m*. Por los puntos *A*, *B* y *C* en *m*, se trazan paralelas *a*, *b* y *c*. Se llaman proyecciones paralelas de *A*, *B* y *C* sobre *n* a los puntos A_1, B_1 y C_1 en que las rectas *a*, *b* y *c* cortan a *n*.

   Si A_1, B_1 y C_1 son las proyecciones paralelas de *A*, *B* y *C* en *n*, entonces se tiene que $\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$. Considera las diferentes posibilidades de orden de *A*, *B* y *C.*

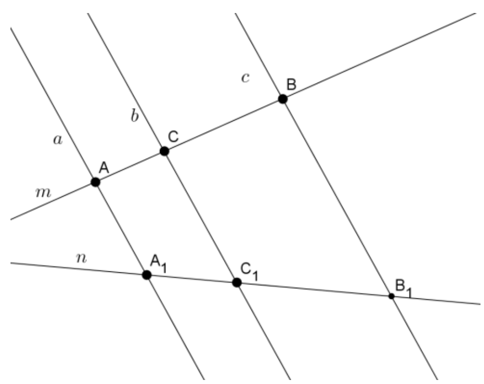


Figura 3.9

3.3. Puntos al infinito

En esta sección se verá como ampliar el plano euclidiano con nuevos puntos llamados al *infinito, ideales* o *impropios* y una recta, llamada también al *infinito, ideal* o *impropia.* Esta ampliación transforma al plano euclidiano en el plano proyectivo. La idea de ampliar el plano euclidiano nace en primera instancia como producto de los estudios sobre la perspectiva realizados por los artistas del Renacimiento para representar un objeto tridimensional en un lienzo plano.

Artistas de la talla de León Battista Alberti (1404-1472), Piero della Francesca (1415-1492), Leonardo da Vinci (1452-1519) y Alberto Durero (1471- 1528) trabajaron sobre este problema.

En particular Alberti, considerado el genio teórico de la perspectiva, en su libro De la Pintura (Della Pittura), "*propuso pintar lo que ve un ojo, aunque era consciente de que en la visión normal los dos ojos ven la misma escena desde posiciones ligeramente distintas... Su principio básico puede explicarse en los siguientes términos. Entre el ojo y la escena interponía una pantalla de vidrio en posición vertical. Entonces imaginaba líneas de luz desde el ojo o punto fijo hasta cada punto de la escena misma. Llamaba a estas líneas una pirámide de rayos o una proyección. Donde estos rayos atravesaban la pantalla de vidrio (la imagen plana), imaginaba puntos marcados; a esta colección de puntos la llamaba una sección*". (Kline, 1972)

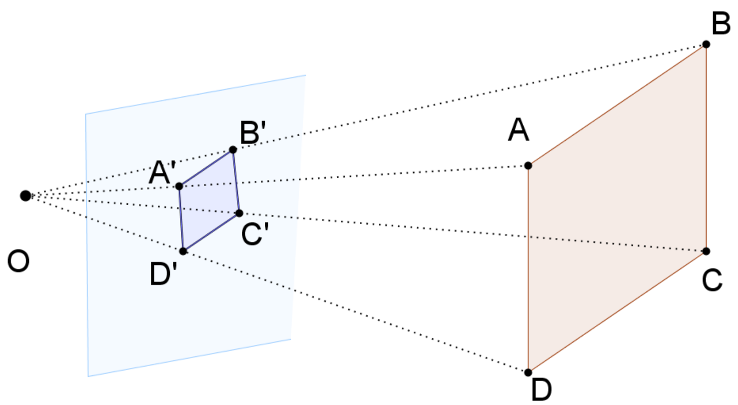


Figura 3.10

Como el papel o el lienzo no son transparentes, la tarea de dibujar con exactitud la sección o proyección presentaba un problema para el pintor y les llevó a diseñar una serie de instrumentos. Entre ellos están la Ventana de Leonardo, el Velo de Alberti y el Portillo de Durero recogidos en algunos grabados por el mismo Durero.

Ilustración 3.1
La ventana de Leonardo

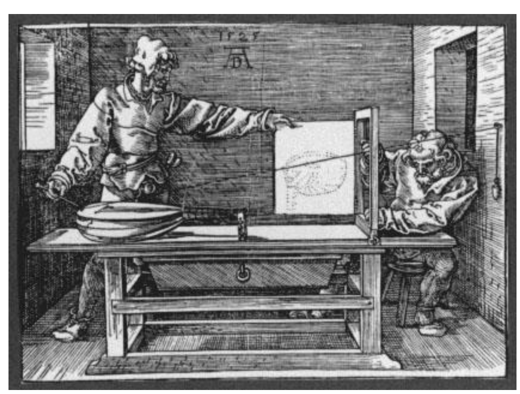


Ilustración 3.2
El portillo de Durero

Alberti observó también, que si se interponen dos pantallas en diferentes posiciones las secciones son diferentes, al igual que si se ve la escena desde puntos diferentes. Esta consideración planteó una pregunta significativa desde el punto de vista matemático sobre las propiedades que tienen en común un objeto y sus proyecciones, esto es, las propiedades que permanecen invariantes bajo proyecciones. El estudio de estas propiedades dio origen a la geometría proyectiva.

Definición 3.3.1. Se define una proyección central del plano P_1 *en el plano* P_2*, desde un punto O, que no está en ninguno de los dos planos, asociando a cada punto R en el plano* P_1*, un punto R′, su imagen, en el plano* P_2 *de tal forma que R, R′ y O sean colineales.*

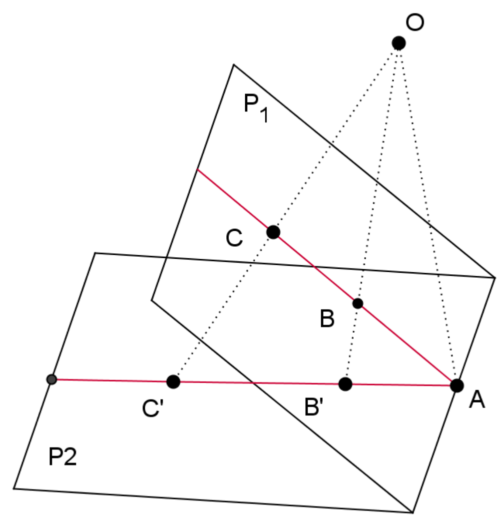


Figura 3.11

La imagen de un punto es un punto, ya que la recta por *O* y cualquier punto de P_1 corta al plano P_2 en un punto. En la figura 3.11 la imagen de *B* es *B′* y la de *C* es *C′*. Además, en el caso del punto *A* que está en la intersección de los dos planos, su imagen es el mismo punto *A*.

Si *A*, *B* y *C* son colineales, entonces las rectas *OA*, *OB* y *OC* están en un tercer plano, el determinado por la recta que contiene a estos puntos y a *O*. Por lo tanto, las intersecciones de las rectas *OA*, *OB* y *OC* con el plano P_2 están sobre la intersección de P_2 con este tercer plano, esto es, sobre una recta. Se tiene entonces, que la imagen de una recta bajo la proyección es una recta. Es fácil comprobar que las distancias y los ángulos no se conservan bajo la proyección.

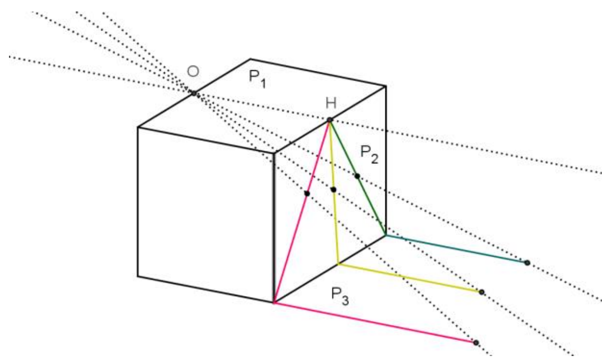


Figura 3.12

Al hacer la proyección de un plano sobre otro, hay puntos que pueden no tener imagen. Por ejemplo, en la figura 3.12 se ha proyectado el plano P_2 sobre el plano P_3, desde el punto O que está en el plano P_1 paralelo a P_3.

Las tres rectas en P_2 y concurrentes en el punto H, que está en la intersección de P_1 y P_2, se proyectan en tres rectas paralelas, ya que la recta OH no interseca al plano P_3, por estar en un plano paralelo. De hecho, cualquier punto que está en la recta de intersección de los planos P_1 y P_2 no tiene imagen bajo la proyección de P_2 sobre P_3 desde O. Si ahora, se piensa en la proyección del plano P_3 sobre el plano P_2, desde el punto O, se tiene que las rectas paralelas se transforman en rectas que se intersecan en el punto H, que por cierto no es imagen de ningún punto de P_3.

A través de los antiguos métodos de la perspectiva se introdujeron los llamados puntos de fuga, que no son más que los puntos al infinito o puntos ideales que en la geometría proyectiva se tratan como puntos cualesquiera. Así, para resolver el problema de la representación en perspectiva de un adoquinado compuesto por cuadrados, Alberti desarrolló un método usando precisamente los puntos de fuga sobre una recta, la línea del horizonte.

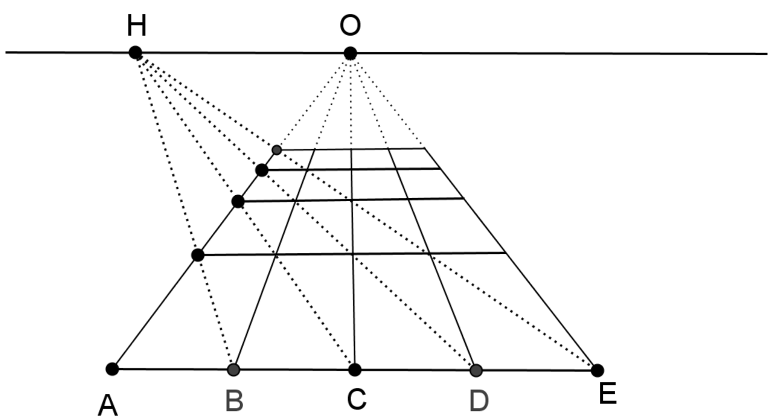


Figura 3.13

Estas son algunas de las ideas que dieron pie a la inclusión de los puntos al infinito en el plano euclidiano.

Ahora, regresando al plano euclidiano. En primer lugar, se introducirá alguna notación que permitirá ser más claro en la exposición.

Notación. Sea P un punto cualquiera en el plano, se llamará el haz de rectas con vértice en P, o simplemente el haz de rectas por P, al conjunto de rectas concurrentes en P. Al punto P se le llama el centro o vértice del haz.

Conviene notar que un haz de rectas contiene una recta en cada dirección del plano.

Notación. Sea m una recta cualquiera en el plano, se llamará hilera de puntos en m, a cualquier conjunto de puntos en m.

Teorema 3.3.1. Sean m una recta y P un punto que no está en m. Existe una correspondencia biunívoca entre las rectas del haz por P, excepto la paralela a m, y los puntos de la recta m.

Demostración:

Sean *PQ* la perpendicular a *m* por *P* y *m'* la paralela a *m* por *P*. Sea b_i una recta distinta de *m'* que pasa por *P,* por tanto, b_i no es paralela a *m* (Actividad 10, 1) y corta a *m* en un único punto P_i (postulado 1).

Se establece la correspondencia $b_i \rightarrow P_i$.

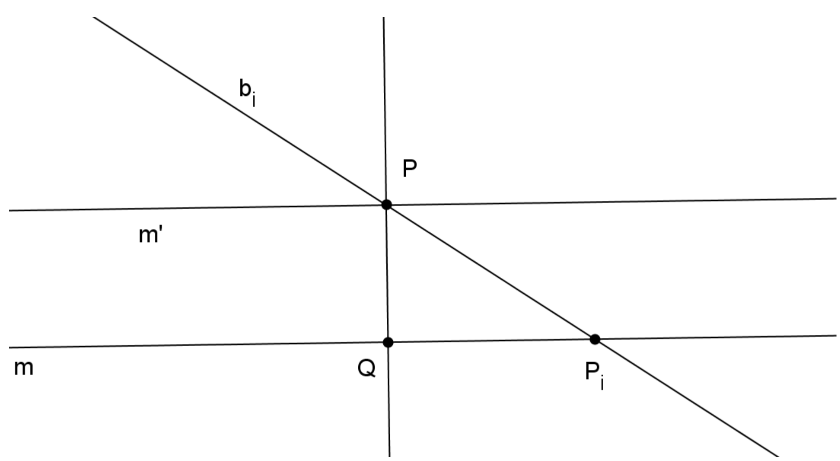


Figura 3.14

Esta correspondencia es biunívoca, ya que a cada recta por *P* distinta de *m'* corresponde un único punto en *m*, su punto de intersección con ella. Además, dos rectas distintas por *P* intersecan a *m* en puntos distintos y para cualquier punto P_j en *m* existe la recta PP_j en el haz (postulado 2).

Ahora, se puede observar en la figura 3.14 que mientras menor es el ángulo que forma una recta del haz con la recta *m′*, en cualquiera de los dos semiplanos determinados por *PQ*, el punto asociado a la recta en *m* está más alejado de *Q*, en los dos sentidos de la recta. Esto es, mientras una recta del haz se acerca más a la recta a *m′*, la paralela a *m* por *P*, su punto asociado se aleja más de *Q*. Uno de los propósitos para ampliar las rectas con un punto al infinito es garantizar que las rectas *m* y *m′* se corten.

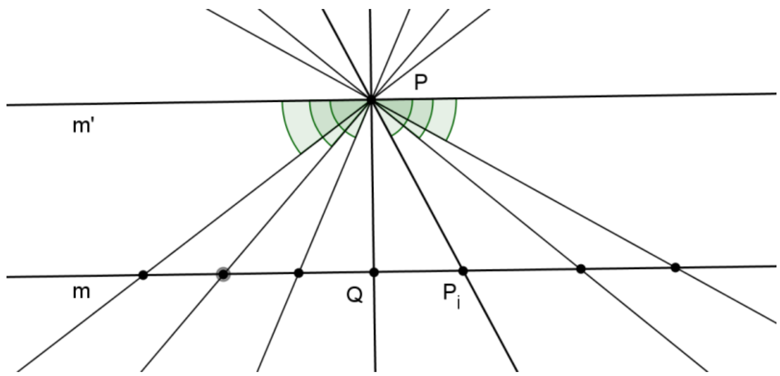


Figura 3.15

Se amplia, entonces, cada recta *m* con un punto ideal, llamado el punto al infinito de esa recta, y se define como el punto de intersección de *m* con todas sus paralelas. Se tiene que cada conjunto de rectas paralelas en una dirección en el plano comparte el mismo punto al infinito. Se define la recta al infinito como el lugar geométrico de los puntos al infinito.

Cabe mencionar que cada punto al infinito está asociado con una dirección en el plano, la dirección de las rectas paralelas que se intersecan en ese punto.

La ampliación del plano por los puntos al infinito permite incluir al plano euclidiano en el plano proyectivo. El plano euclidiano ampliado constituye un modelo del plano proyectivo, que permite trabajar con las propiedades heredadas del plano euclidiano.

La principal ventaja de trabajar con el plano ampliado es que una serie de propiedades de incidencia de puntos y rectas no tienen ya excepciones; por ejemplo, el teorema 3.3.1 se puede enunciar como: *Sean m una recta y P un punto que no está en m. Existe una correspondencia biunívoca entre las rectas del haz por P y los puntos de la recta m.*

De acuerdo con la demostración anterior, solamente faltaba asociarle un punto en *m* a la recta *m′*, la paralela a *m* por *P*. El punto que se le asocia a la recta *m′* es igualmente el punto de intersección de *m* y *m′*, que es el punto al infinito que comparten por ser paralelas en el sentido euclidiano.

Asimismo, se puede extender el concepto de haz de rectas a las rectas concurrentes en un punto al infinito, que son rectas paralelas en el sentido euclidiano, tal y como se presenta en la figura 3.16.

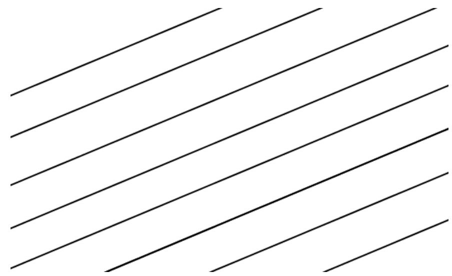


Figura 3.16

En los teoremas 3.3.2 y 3.3.3 se presentan dos características esenciales de incidencia que tiene el plano proyectivo.

Teorema 3.3.2 Cualesquiera dos puntos P y Q en el plano euclidiano ampliado determinan una única recta.

Demostración:

Caso 1: Los dos puntos P y Q son ordinarios, esto es, no son puntos al infinito.

De acuerdo con el postulado 1, existe una única recta ordinaria por *P* y *Q*. La única otra recta que se ha incorporado al plano ampliado es la recta al infinito que no contiene puntos ordinarios, por tanto, la recta en el plano euclidiano ampliado que pasa por *P* y *Q* es única.

Caso 2: Los dos puntos P y Q son puntos al infinito.

De acuerdo con la definición de la recta al infinito, ésta contiene a todos los puntos al infinito, por tanto, *P* y *Q* están en la recta al infinito. Ahora, ya que toda recta ordinaria contiene sólo un punto al infinito, no existe ninguna recta ordinaria que contenga a los dos puntos al infinito, por tanto, en este caso también la recta en el plano euclidiano ampliado que pasa por *P* y *Q* es única.

Caso 3: El punto P es un punto ordinario y Q es un punto al infinito.

De acuerdo con la definición de un punto al infinito, como la intersección de rectas paralelas en una dirección dada y como por un punto ordinario *P* solamente pasa una paralela euclidiana en una dirección dada, la recta en el plano euclidiano ampliado que pasa por *P* y *Q* es única.

Teorema 3.3.3 Cualesquiera dos rectas m y n en el plano euclidiano ampliado determinan (se intersecan) en un único punto.

Demostración:

Caso 1: Las dos rectas p y q son ordinarias y no paralelas en el sentido euclidiano.

Como consecuencia del postulado 1 y de la definición de rectas paralelas, la intersección de las rectas *p* y *q* es un único punto ordinario. Los otros puntos que se han incorporado al plano ampliado son los puntos al infinito y como *p* y *q* son rectas ordinarias no paralelas, no comparten ningún punto al infinito, por tanto, la intersección de *p* y *q* en el plano euclidiano ampliado es un único punto, ordinario en este caso.

Caso 2: Las dos rectas p y q son ordinarias y paralelas en el sentido euclidiano.

Como consecuencia del postulado 1 y de la definición de rectas paralelas, no existe un punto ordinario que sea intersección de *p* y *q*. Ahora bien, como *p* y *q* son rectas ordinarias paralelas en el sentido euclidiano, comparten un único punto al infinito, por tanto, la intersección de *p* y *q* en el plano euclidiano ampliado es un único punto, al infinito en este caso.

Caso 3: La recta p es una recta ordinaria y q es la recta al infinito.

De acuerdo con la definición de recta al infinito, como la colección de todos los puntos al infinito, la intersección de *p* y *q* es el punto al infinito que contiene *p*, que es único.

Actividad 35

1. Demuestre que los puntos en un segmento de recta pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los puntos de otro segmento de recta del doble de longitud.
2. Demuestre que tres rectas en el plano ampliado determinan un triángulo o son concurrentes.
3. Demuestra el teorema 3.3.1 para el caso en que la recta *m* pase por el punto *P*.
4. Demuestre que, si *P* es el punto medio del lado *BC* en un triángulo *ABC* y si *AB* es menor que *CA*, entonces el $\angle PAC < \angle BAP$. Sugerencia: Teorema de la Bisectriz generalizada.
5. Las rectas de dos haces con diferentes vértices están en correspondencia de tal forma que las intersecciones de rectas correspondientes son paralelas. Encuentre un par de rectas perpendiculares en el primer haz de tal forma que sus rectas correspondientes en el segundo haz también lo sean.

3.4. Puntos armónicos

En la sección 3.2 se definió que el punto *Q* es el conjugado armónico de *P* respecto del segmento *A* y *B* si y sólo si

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}.$$

Los siguientes teoremas exponen algunas de las propiedades de los puntos armónicos.

Teorema 3.4.1 Si Q es conjugado armónico de P respecto del segmento AB, entonces *Q es conjugado armónico de P respecto del segmento BA.*

Demostración:

Si $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{PB}{AP} = -\frac{QB}{AQ} \Rightarrow \frac{-BP}{-PA} = -\frac{-BQ}{-QA} \Rightarrow \frac{BP}{PA} = -\frac{BQ}{QA}$ que es equivalente a que *Q* sea el conjugado armónico del punto *P* respecto del segmento *BA*.

Teorema 3.4.2 Si Q es conjugado armónico de P respecto del segmento AB, entonces *P es conjugado armónico de Q respecto del segmento AB. Se dice entonces que P y Q son conjugados armónicos respecto de AB o bien que el segmento AB está dividido armónicamente por P* y *Q*.

Demostración:

Si $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = -\frac{AP}{PB}$ que es equivalente a que *P* sea el conjugado armónico del punto *Q* respecto del segmento *A* y *B*.

Teorema 3.4.3 Si P y Q son conjugados armónicos respecto del segmento AB, entonces *A y B son conjugados respecto del segmento PQ. Se dice entonces que A, B; P y Q son una hilera armónica.*

Demostración:

Sean *P* y *Q* conjugados armónicos respecto de *A* y *B*, entonces $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$.
Pero, $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} \Longrightarrow \frac{AP}{AQ} = -\frac{PB}{QB} \Longrightarrow \frac{-PA}{AQ} = -\frac{PB}{-BQ} \Longrightarrow -\frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BQ} \Longrightarrow$ $\frac{PA}{AQ} = -\frac{PB}{BQ}$, lo que demuestra que *A* y *B* son conjugados armónicos con respecto a *PQ*.

Los tres teoremas anteriores demuestran que todas las permutaciones de *A*, *B*, *P* y *Q* que conservan las parejas de conjugados armónicos, es también armónica.

Se dice entonces que *A, B; P* y Q es una hilera armónica y se acostumbra representar como *(AB, PQ)* = -1.

Esto es, *(AB, PQ)* = -1 ⇔ *(BA, PQ)* = -1 ⇔ *(BA, QP)* = -1 ⇔ *(AB, QP)* = -1⇔ *(QP, AB)* = -1 ⇔ *(PQ, AB)* = -1 ⇔ *(PQ, BA)* = -1 ⇔ *(QP, BA)* = -1.

La notación anterior obedece a que dadas dos parejas de puntos *A*, *B* y *P*, *Q*, se define su razón cruzada como la razón $\frac{\frac{AP}{PB}}{\frac{AQ}{QB}}$ que se denota como *(AB, PQ)*. Dada la definición de puntos armónicos, es claro que su razón cruzada es -1.

Se considera que la razón cruzada de cuatro puntos es el primer invariante proyectivo que fue determinado. De hecho, se desconoce su origen exacto, pero se presume que Menelao de Alejandría (siglo I) lo conocía, ya que un resultado homólogo para grandes círculos aparece en su obra *Sphaerica*. La primera mención sobre este tema, en referencia con el plano, la hace Pappus de Alejandría en la época en que trabajaba reconstruyendo el libro perdido de Porismas[16] de Euclides, lo que sugiere que la invariancia de la razón cruzada pudiera haber sido ya conocida por Euclides. (Coolidge, 1963).

Dado un segmento *AB* y un punto *P*, para construir el cuarto armónico, es decir el conjugado armónico de *P* respecto de *AB*, se puede proceder de la siguiente manera:

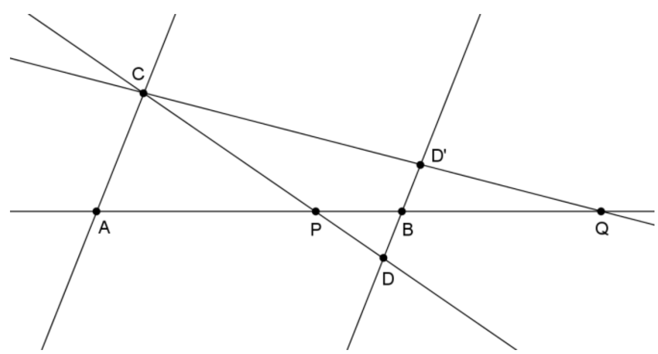


Figura 3.17

Se trazan dos rectas paralelas cualesquiera por *A* y *B*, se traza una recta por *P* que corte a estas paralelas en *C* y *D* respectivamente. En la recta *DB* se

[16] *"Se cree, basándose en los comentarios de Pappus y Proclo, que esos Porismas trataban esencialmente acerca de la construcción de objetos geométricos cuya existencia ya estaba asegurada. Así pues, podían considerarse como problemas intermedios entre los teoremas puros y las construcciones mediante las que se establece la existencia de alguna figura, entre los que podía ser típica la localización del centro de una circunferencia que cumpliera ciertas condiciones dadas".* Kline, Morris (11), pág 89.

construye *D'* tal que *DB* = *BD'*. Se traza la recta *CD'*. El punto *Q* de intersección de esta recta con *AB* es el cuarto armónico buscado.

Para demostrar que efectivamente este es el punto buscado, basta comprobar que Δ*ACP* ≈ Δ*BDP* y que Δ*CAQ* ≈ Δ *D'BQ*, por tener sus ángulos correspondientes iguales, de donde:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BD} \text{ por la semejanza } \Delta ACP \approx \Delta BDP,$$

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{AC}{BD'} \text{ por la semejanza } \Delta CAQ \approx \Delta D'BQ.$$

Por tanto $\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{DB}$ y $\frac{AQ}{QB} = \frac{AC}{-BD'} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$.

En la sección 3.2 se vio también que el único punto, distinto de *A* y *B*, que no tiene conjugado armónico con respecto a un segmento dado es el punto medio del segmento, ya que no existe un punto ordinario del plano euclidiano que divida al segmento en la razón r = -1. De la misma forma se vio que dado un segmento *AB*, la razón r en que los puntos exteriores al segmento dividen al segmento se acerca por los dos lados a r= -1, mientras más se alejan los puntos de *A* y *B*.

Si además se retoma la construcción que se acaba de realizar, cuando *P* es el punto medio de *AB*, se tiene que los triángulos Δ*ACP* y Δ*BDP*, no sólo son semejantes, sino congruentes y por tanto la recta *CD'* es paralela a la recta determinada por *AB* y por tanto su intersección es el punto al infinito de esas rectas.

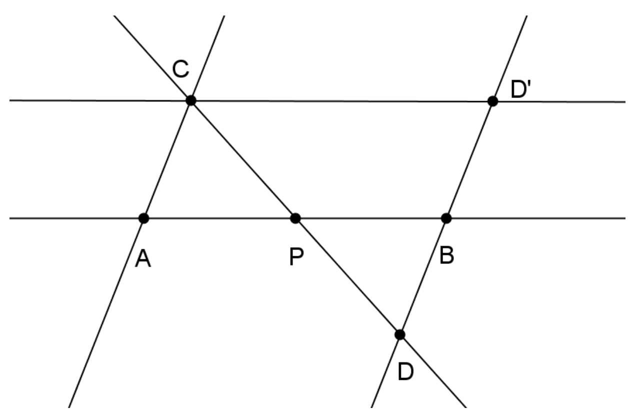


Figura 3.18

El contexto anterior induce la siguiente definición.

Definición 3.4.1 El conjugado armónico del punto medio de un segmento es el punto al infinito de esa recta. Esto es, si P es el punto al infinito de una recta que contiene al segmento AB, se define $\frac{AP}{BP} = -1$.

De esta forma, dado un segmento *AB*, cualquier punto *P*, distinto de *A* y *B*, tiene un único conjugado armónico *Q* respecto del segmento dado.

Teorema 3.4.4 Si (AB, PQ) = -1 y O es el punto medio de AB, entonces se tiene que $OB^2 = OP \cdot OQ$*, e inversamente.*

Demostración:

Sean *A*, *B*, *P*, *Q* cuatro puntos tales que (*AB*, *PQ*) = -1 y *O* el punto medio de *AB*.

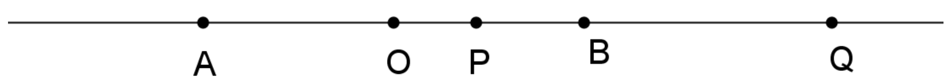


Figura 3.19

Por ser *A*, *B*, *P*, *Q* una hilera armónica se tiene que

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} \Leftrightarrow \frac{AO+OP}{PO+OB} = -\frac{AO+OQ}{QO+OB}.$$

Pero, *AO* = *OB*,

$$\frac{OB+OP}{OB-OP} = -\frac{OB+OQ}{OB-OQ} \Leftrightarrow 2OB^2 = 2\,OP \cdot OQ \Leftrightarrow OB^2 = OP \cdot OQ.$$

Teorema 3.4.5 Dado un triángulo cualquiera, los puntos en que las bisectrices interna y externa de cualquiera de sus ángulos cortan al lado opuesto, son conjugados armónicos con respecto a ese lado.

Demostración:

Sea *ABC* un triángulo, *CP* y *CQ* las bisectrices interior y exterior del ∠*C*, respectivamente. Para demostrar que (*AB*, *PQ*) =-1, se calculará el área de algunos triángulos. Sea entonces *CD* la perpendicular a *AB* desde *C*. Sean *PF* y *PG* las perpendiculares a *CA* y *BC* desde *P* y *QH* y *QI* las perpendiculares a estos mismos lados desde Q.

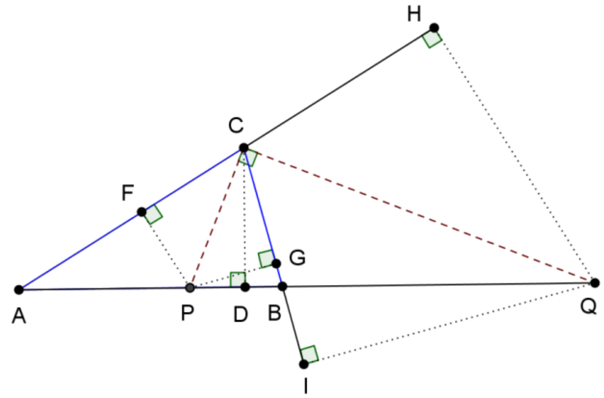


Figura 3.20

$$\text{Área } (\Delta\, APC) = \frac{1}{2}\, AP\, \cdot CD, \qquad \text{Área } (\Delta\, PBC) = \frac{1}{2}\, PB\, \cdot CD,$$

de donde,

$$\frac{\acute{A}rea\ (\Delta\, APC)}{\acute{A}rea\ (\Delta\, PBC)} = \frac{AP}{PB}.$$

Pero si ahora se calcula el área de estos mismos triángulos, tomando como base *CA* y *BC* respectivamente se tiene que

$$\text{Área } (\Delta\, APC) = \frac{1}{2}\, CA\, \cdot PF, \qquad \text{Área } (\Delta\, PBC) = \frac{1}{2}\, BC\, \cdot PG,$$

pero $PF = PG$ por estar *P* en la bisectriz del $\angle C$, por tanto,

$$\frac{\acute{A}rea\ (\Delta\, APC)}{\acute{A}rea\ (\Delta\, PBC)} = \frac{CA}{BC}.$$

Se tiene entonces que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CA}{BC}. \quad \ldots (1)$$

Ahora se calculará el área de los triángulos *AQC* y *BQC*:

$$\text{Área } (\Delta\, AQC) = \frac{1}{2}\, AQ\, \cdot CD, \quad \text{Área } (\Delta\, BQC) = \frac{1}{2}\, BQ\, \cdot CD,$$

de donde,

$$\frac{\acute{A}rea\ (\Delta\, AQC)}{\acute{A}rea\ (\Delta\, BQC)} = \frac{AQ}{BQ}.$$

Pero si ahora se calcula el área de estos mismos triángulos, tomando como base *CA* y *BC* respectivamente se tiene que

$$\text{Área } (\Delta\, AQC) = \frac{1}{2}\, CA\, \cdot QH, \quad \text{Área } (\Delta\, BQC) = \frac{1}{2}\, BC\, \cdot QI,$$

pero $QH = QI$ por estar Q en la bisectriz exterior del $\angle C$, por tanto,

$$\frac{Área\ (\Delta\, AQC)}{Área\ (\Delta\, BQC)} = \frac{CA}{BC}.$$

Se tiene entonces,

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{CA}{BC}. \quad \ldots(2)$$

De (1) y (2) se tiene que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = -\frac{AQ}{QB}\ .$$

Por lo tanto (AB, PQ) =-1, como se quería demostrar.

Definición 3.4.2 El ángulo de intersección de dos circunferencias es el ángulo entre sus tangentes en sus puntos de intersección.

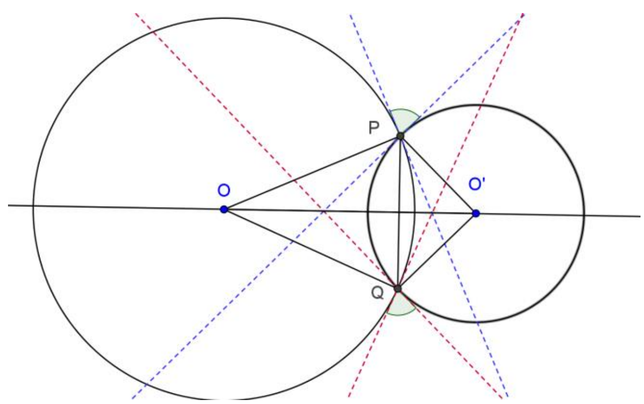


Figura 3.21

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ dos circunferencias con centro en O y O', respectivamente. Sean P y Q, sus puntos de intersección. En la figura 3.21 se han trazado las tangentes a los círculos por estos puntos. Para que la definición anterior tenga sentido, queda como ejercicio para el lector demostrar que los ángulos que forman las tangentes en P y Q son iguales.

Definición 3.4.3 Dos circunferencias son ortogonales si su ángulo de intersección es recto; esto es, si sus tangentes en sus puntos de intersección son perpendiculares.

Dado que una tangente a un círculo en un punto y el radio al punto de tangencia son perpendiculares (Teorema 2.4.1), es claro que si dos circunferencias son ortogonales una tangente a una de ellas en un punto de intersección pasa por el centro de la otra; inversamente, si el radio de una de ellas al punto de intersección es tangente a la otra entonces son ortogonales.

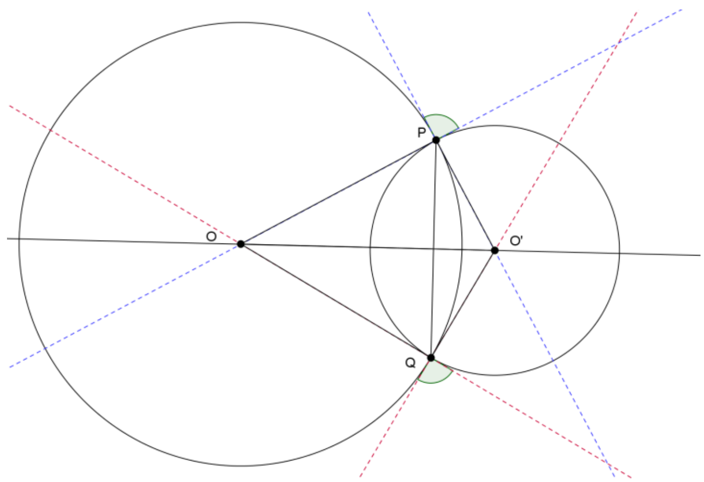


Figura 3.22

Teorema 3.4.6 Si dos circunferencias son ortogonales entonces el cuadrado de la distancia entre sus centros es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.

Demostración:

Tomando como base la figura 3.22, el triángulo *OO'P* es rectángulo, ya que el ángulo entre sus radios es el ángulo entre las tangentes que es recto, por tanto, por el Teorema de Pitágoras $(OO')^2 = (OP)^2 + (O'P)^2$.

Teorema 3.4.7 Si dos circunferencias ortogonales son cortadas por una recta que pasa por el centro de una de ellas, los cuatro puntos de intersección forman una hilera armónica.

Demostración:

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos circunferencias ortogonales con centro en O y O', respectivamente. Sean P y Q, sus puntos de intersección. Sea AB un diámetro en $\mathcal{C}$, que corta a $\mathcal{C}'$ en C y D.

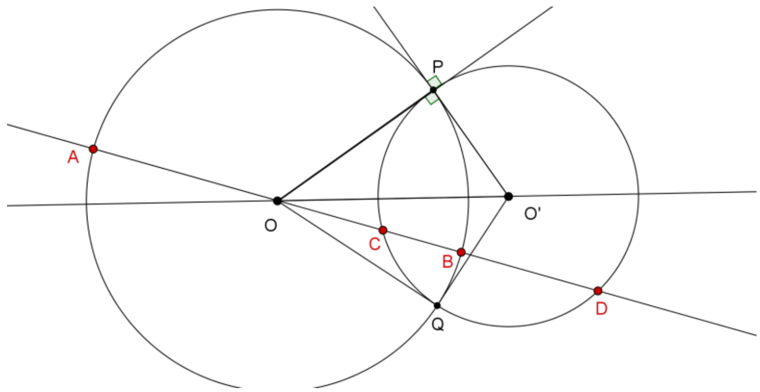


Figura 3.23

Por definición, la potencia del punto *O* respecto al círculo $\mathscr{C}$ con centro en *O'* es igual a $OC \cdot OD$. Pero, por otro lado, la potencia de *O* es igual al cuadrado de la longitud de la tangente desde *O* al círculo $\mathscr{C}$ (Actividad 27, 1). Por ser ortogonales los dos círculos, *OP* es tangente a $\mathscr{C}'$, por tanto, $OP^2 = OC \cdot OD$, pero ya que $OP = OB$, se tiene que $OB^2 = OC \cdot OD$, y por el teorema 3.4.4, $(AB, CD) = -1$.

Se deja como ejercicio al lector demostrar el inverso de este teorema.

3.5. Ángulos dirigidos

Así como se habla de segmentos dirigidos, es conveniente considerar ángulos dirigidos. Ya en el tema de Trigonometría se ha abordado el caso. Por convención, se considera un ángulo positivo cuando su sentido es contrario a las manecillas del reloj y negativo en caso contrario.

Los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOA$ son iguales en magnitud, pero tienen sentido contrario y así:

$$\angle AOB = -\angle BOA.$$

Para trabajar con los ángulos dirigidos, se retomarán los resultados vistos en la sección de Trigonometría del capítulo 1.

3.6. Rectas armónicas

Definición 3.6.1. Si OA, OB, OP y OQ son cuatro rectas concurrentes, se dice que OA y OB están separadas armónicamente por OP y OQ, o bien que OP y OQ son conjugadas armónicas con respecto a OA y OB, si

$$\frac{\operatorname{sen} \angle AOP}{\operatorname{sen} \angle POB} = -\frac{\operatorname{sen} \angle AOQ}{\operatorname{sen} \angle QOB}.$$

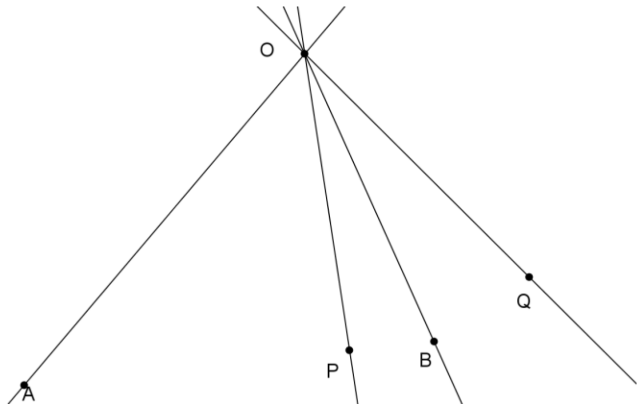


Figura 3.24

En este caso se denotará como $O(AB, PQ) = -1$.

Teorema 3.4.6 La hilera de puntos en que las rectas de un haz armónico, cortan cualquier recta que no pase por su vértice es una hilera armónica; inversamente, el haz de rectas que se obtiene de unir los puntos de una hilera armónica con un punto cualquiera del plano que no sea colineal con la hilera, es un haz armónico.

Demostración:

Sea $O(AB, PQ) =-1$ que corta a una recta cualquiera en los puntos *A, B, P y Q*.

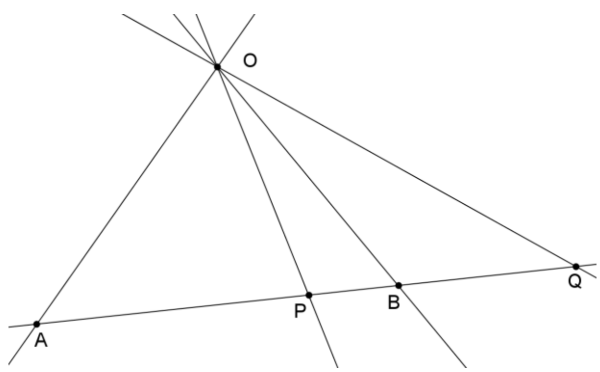


Figura 3.25

Ya que el haz es armónico, se tiene que

$$\frac{sen\,\angle AOP}{sen\,\angle POB} = -\frac{sen\,\angle AOQ}{sen\,\angle QOB}.$$

Si se multiplican los dos miembros de la ecuación por $\frac{OA}{BO}$, se obtiene,

$$\frac{OA}{BO}\ \frac{sen\ \angle AOP}{sen\ \angle POB} = -\ \frac{OA}{BO}\ \frac{sen\ \angle AOQ}{sen\ \angle QOB},$$

y por el teorema de la bisectriz generalizada,

$$\frac{AP}{PB} = -\ \frac{AQ}{QB}\ .$$

Inversamente, si (*AB*, *PQ*) = -1, se tiene que $\frac{AP}{PB} = -\ \frac{AQ}{QB}$, y por tanto se concluye que el haz es armónico.

De este teorema se pueden inferir varios resultados:

a) Si *OP* y *OQ* son conjugadas armónicas respecto de *OA* y *OB*, entonces *OA* y *OB* son conjugados respecto de *OP* y *OQ*. Más aún, cualquier permutación de las rectas que conservan las rectas conjugadas es un haz armónico.

b) Si un haz de rectas es cortado por una transversal en una hilera armónica de puntos, entonces cualquier otra transversal del haz también corta sus líneas en una hilera armónica de puntos. Esto es, la propiedad de que cuatro puntos sean armónicos es un invariante proyectivo.

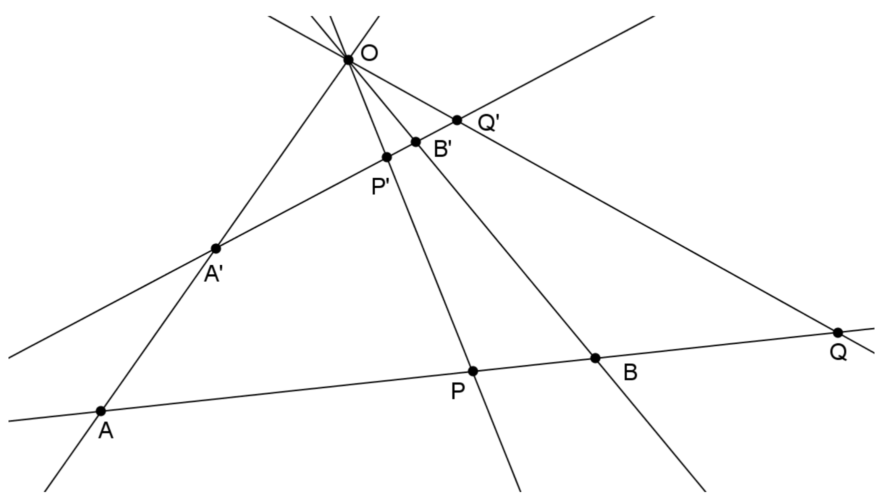


Figura 3.26

(*AB*, *PQ*) = -1 si y sólo si (*A′B′*, *P′Q′*) = -1

Actividad 36

Demuestre:

1. Si A, B, C, D son cuatro puntos armónicos y O y O' son los puntos medios de AB y CD respectivamente, entonces $(OB)^2 + (O'C)^2 = (OO')^2$.
2. Si A, B, C, D son cuatro puntos armónicos entonces los segmentos AP, AB y AQ están en progresión armónica, esto es:

$$\frac{2}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\mathrm{AP}} + \frac{1}{\mathrm{AQ}}.$$

3. Las rectas que unen cualquier punto de una circunferencia a los vértices de un cuadrado inscrito, forman un haz armónico.
4. Sea ABC un triángulo y L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente, entonces el haz $L(MN, AB)$ es armónico.
5. Si AD, BE, CF son las alturas del triángulo ABC, entonces el haz $D(EF, AB)$ es armónico.
6. Demuestre que, si dos círculos se intersecan en los puntos P y Q, los ángulos que forman sus tangentes en los puntos de intersección son iguales.
7. Demuestre que, si $\mathcal{C}$ es una circunferencia con diámetro AB, cualquier circunferencia que pase por un par de puntos conjugados armónicos con respecto a AB, es ortogonal a $\mathcal{C}$.
8. Sean A y B dos puntos distintos en una circunferencia y sean C, D, E y F otros cuatro puntos distintos entre sí y diferentes de A y B, entonces $A(CD, EF)$ es armónico si y sólo si $B(CD,EF)$ es armónico.
9. La bisectriz del ángulo A del triángulo ABC corta el lado opuesto en P. Sean Q y R los pies de las perpendiculares desde B y C sobre AP, entonces los cuatro puntos A, P, Q y R son armónicos.
10. El conjugado armónico de C con respecto a A y B, el punto D, puede obtenerse construyendo un punto P tal que el ángulo formado por PA y PB sea bisecado por PC y construyendo la perpendicular a PC. D es la intersección de AB con la perpendicular a PC.
11. Dos hileras armónicas (AB, PQ) y $(AB', P'Q')$ están en líneas distintas, entonces BB', PP' y QQ' son concurrentes y BB', PQ' y $P'Q$ son también concurrentes.
12. Si en un haz armónico de rectas distintas, un par de líneas conjugadas es perpendicular, una a otra, entonces estas rectas bisecan los ángulos

formados por las otras dos. Inversamente si en un haz de cuatro rectas diferentes, uno de los pares biseca los ángulos formados por el otro par, el haz es armónico.

13. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y *P* un punto. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias ortogonales a $\mathcal{C}$ que pasan por *P*.

14. Sean *A*, *B*, *C* y *D* cuatro puntos colineales. Encontrar dos puntos *P* y *Q*, tales que sean conjugados armónicos con respecto a *A* y *B*, así como con respecto a *C* y *D*. Analiza los diferentes casos.

3.7 Homotecia

Definición 3.7.1 Se llama homotecia con centro en un punto O y razón k ≠ 0, a la transformación que asocia a cada punto P en el plano, distinto de O, un punto P′ tal que:

O, P y P′ son colineales,

OP′ = k OP,

La imagen del punto O es el mismo punto O.

Al punto O se le llama centro de homotecia y a k se le llama la razón de homotecia.

Teorema 3.7.1 Sea $H_{O,k}$ una homotecia con centro en el punto O, k ≠ 0, y A, B dos puntos tales que O, A y B no son colineales. Si se tiene que $H_{O,k}(A) = A'$, $H_{O,k}(B) = B'$, entonces A′B′ es paralelo al segmento AB y A′B′ = k AB.

Demostración:

a) Sea *k* positiva, entonces *A* y *A*′ están en la misma semirrecta determinada por *O,* al igual que *B* y *B*′, ya que *OA* y *OA*′ y *OB* y *OB*′ tienen el mismo sentido. Además, ya que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$, por el inverso del teorema de Tales, $AB \parallel A'B'$. Además, los triángulos *OAB* y *OA′B′* son semejantes.

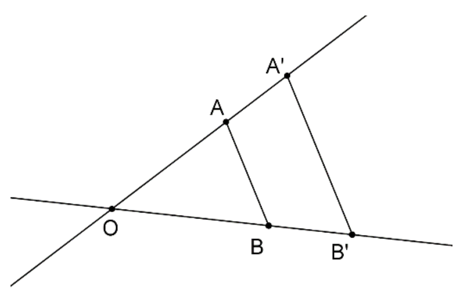


Figura 3.27

Si $k = 1$, entonces $H_{O,k}(P) = P$, para todo punto P en el plano, esto es, la homotecia es la identidad.
Si $k > 1$, entonces $A'B' = k\,AB > AB$ como en la figura 3.27. Si $k < 1$, entonces $A'B' = k\,AB < AB$ como en la figura 3.28.

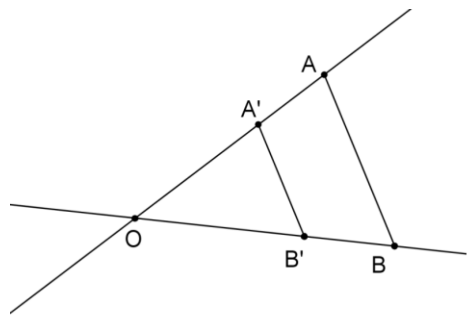


Figura 3.28

b) Sea k negativa, entonces A y A' están en diferentes semirrectas determinadas por O, al igual que B y B', ya que OA y OA' y OB y OB' tienen diferentes sentidos. Los triángulos OAB y $OA'B'$ son semejantes por tener un ángulo igual y los dos lados adyacentes proporcionales (teorema 1.5.4) y por tanto sus ángulos correspondientes son iguales. Esto es, también $AB \parallel A'B'$, ya que los ángulos alternos internos que forman con AA' y con BB' son iguales. Si $k = -1$, entonces los segmentos son de la misma longitud, pero están de distinto lado de O, en este caso se dice que la homotecia es una simetría.

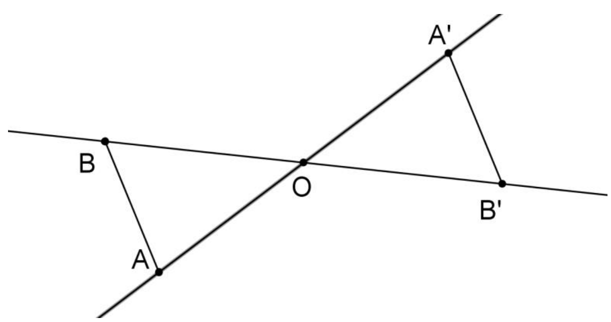


Figura 3.29

Por la semejanza de los triángulos en ambos casos se tiene que,

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k\,.$$

Por lo que *A'B'* = *k AB* y además de que *A'B'* es paralelo al segmento *AB*. Si el valor absoluto de *k* es menor que 1, el segmento *A'B'* es menor que *AB* y si el valor absoluto de *k* es mayor que 1, el segmento *A'B'* es mayor que *AB.*

Dados el centro de homotecia y el homotético de un punto cualquiera en el plano es posible determinar el homotético de cualquier otro punto del plano.

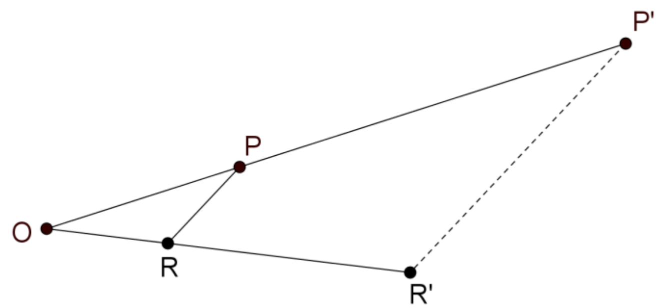


Figura 3.30

Sea *O* el centro de homotecia, *P* un punto en el plano y *P'* su transformado bajo una homotecia con centro en *O* y constante de homotecia *k*. Se tiene que *O*, *P* y *P'* son colineales. Para determinar el homotético de un punto cualquiera *R* que no está en la recta *OP* se trazan las rectas *OR* y *PR*. Por el punto *P'* se traza la paralela a *PR*. Sea *R'* la intersección de esta paralela con la recta *OR*, entonces $H_{O,k}(R) = R'$ como se verá a continuación.

Demostración:

Ya que $H_{O,k}(P) = P'$, se tiene que *O*, *P* y *P'* son colineales y $\frac{OP'}{OP} = k$. Además, ya que $PR \parallel P'R'$, por el teorema de Tales se tiene que $\frac{OR'}{OR} = k$, y ya que también *O*, *R* y *R'* son colineales por construcción, se tiene que $H_{O,k}(R) = R'$.

En el caso en que *R* esté en la recta *O*, *P* y *P'*, se construye el homotético de un punto cualquiera *Q* que no esté en la recta y después se procede como en este caso.

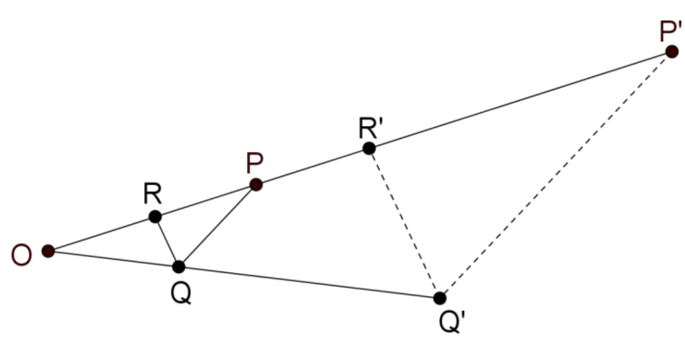


Figura 3.31

Con base en el teorema 3.7.1 se puede demostrar que bajo una homotecia con centro en un punto O y constante de homotecia k, una recta se transforma en una recta paralela y un polígono se transforma en un polígono semejante y de lados paralelos. (Actividad 37,1).

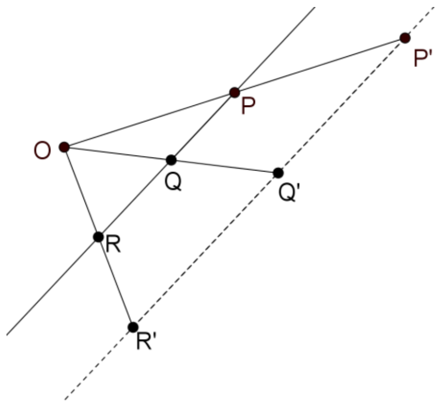


Figura 3.32

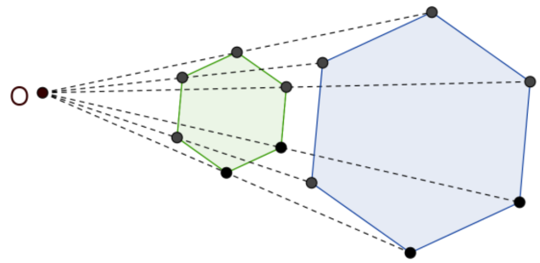


Figura 3.33

Hasta ahora se ha visto que la homotecia transforma puntos en puntos, una recta en una recta paralela y un polígono en un polígono semejante de lados paralelos. ¿Sera cierto el inverso, esto es, si se tienen dos polígonos semejantes de lados paralelos serán entonces homotéticos?

Teorema 3.7.2 Sea P_1 y P_2 dos polígonos semejantes de lados paralelos entonces existe una homotecia tal que P_2 es el homotético de P_1.

Demostración:

Se hará la demostración para triángulos, la que se puede extender a cualquier polígono.

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos semejantes de lados paralelos, por tanto,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k,$$

donde k es la constante de semejanza de los dos triángulos.

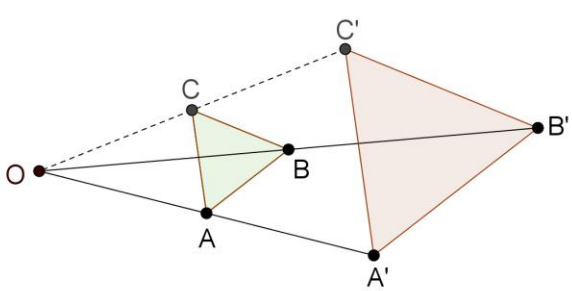


Figura 3.34

a) Se considera primero el caso en que $k \neq 1$, sea O entonces el punto de intersección de AA' y BB'.

Considérense los triángulos OAB y $OA'B'$, pero como $AB \parallel A'B'$, se tiene por el teorema de Tales que, $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ y $\Delta OAB \approx \Delta OA'B'$, por el segundo teorema de semejanza (un ángulo igual y lados adyacentes proporcionales). Pero como además $\frac{A'B'}{AB} = k$, por la semejanza, se tiene que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$. Además, por construcción, O, A y A' y O, B y B' son colineales. Por tanto, la homotecia con centro en O y constante de homotecia k, que es la constante de semejanza, lleva A en A' y B en B'.

Falta por demostrar que C' es el homotético de C bajo la misma homotecia.

Para ello considérese la recta OC y supóngase que no pasa por C'. Sea C'' la intersección de $B'C'$ con OC, entonces por el teorema de Tales $\frac{OB'}{OB} = \frac{OC''}{OC} = k$ y $\Delta OBC \approx \Delta OB'C''$ de donde se tiene que, $\frac{B'C''}{BC} = k$. Pero también $\frac{B'C'}{BC} = k$, de donde $B'C' = B'C''$ y $C' = C''$ y los dos triángulos son homotéticos.

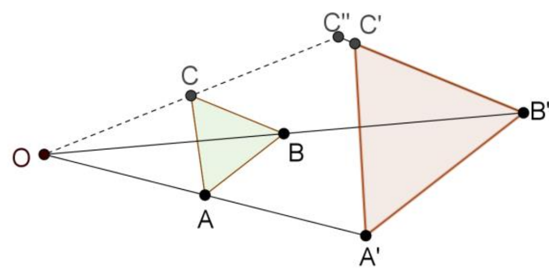


Figura 3.35

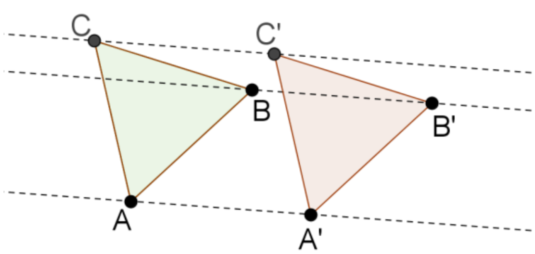


Figura 3.36

b) En el caso de que $k = 1$, los triángulos son congruentes y se tiene que las rectas AA', BB' y CC' son paralelas y por tanto se intersectan en un punto al infinito. Se dice entonces que el centro de homotecia es el punto al infinito en la dirección de esas rectas y que la constante de homotecia es 1. Observe que es equivalente a una traslación.

Actividad 37

Demuestre:

1. Bajo una homotecia con centro en un punto O y constante de homotecia k, tres puntos colineales se transforman en tres puntos colineales y un polígono se transforma en un polígono semejante y de lados paralelos.
2. Un triángulo ABC y su triángulo mediano son homotéticos. Diga cuál es el centro de homotecia y cuál la razón de homotecia.

3. Dos triángulos homotéticos a un tercero son homotéticos entre sí. ¿Cuál es la razón de homotecia si k_1 y k_2 son las razones de homotecia de los dos triángulos con el tercero respectivamente?

Actividad 38

1. Construir un triángulo semejante a un triángulo dado y que tenga un perímetro dado.
2. Dos rectas dadas se intersecan en un punto inaccesible A. Dado un punto P, que no esté en ninguna de las rectas, construir la recta PA.
3. Inscribir un cuadrado en un triángulo dado.
4. Construir un triángulo semejante a un triángulo dado y cuyos vértices estén en tres rectas paralelas dadas.
5. Inscribir en un triángulo, un triángulo cuyos ángulos estén dados.
6. Si el triángulo $A_1B_1C_1$ es simétrico al triángulo ABC y el triángulo $A_2B_2C_2$ es simétrico al triángulo $A_1B_1C_1$. ¿Cómo son los triángulos ABC y $A_2B_2C_2$?

3.8 Circunferencias homotéticas

Propiedades de las circunferencias homotéticas

Sea C una circunferencia con centro en O_1. Sea O un punto que no esté en C. ¿Cuál será la figura transformada de C bajo una homotecia con centro en O y constante de homotecia k?

Teorema 3.8.1 La figura homotética a una circunferencia de radio r es otra circunferencia con centro en el punto homotético a su centro y radio kr, donde k es la constante de homotecia.

Demostración:

Sea P un punto cualquiera en la circunferencia C. Sean O_2 y P' los puntos homotéticos de O_1 y P. Por tanto, como ya se demostró, $O_2P' = k\, O_1P = kr$.

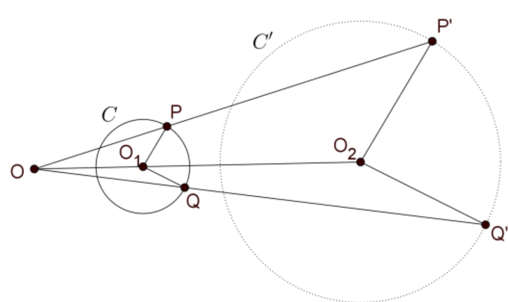


Figura 3.37

Sea ahora Q otro punto cualquiera en la circunferencia C, diferente de P. Se probará que Q' su homotético está en la circunferencia con centro en O_2 y radio $O_2P' = kr$. Para ello se demostrará que, $O_2Q' = k\ O_1P$. Ya que O_2 y Q' son los homotéticos de O_1 y Q respectivamente, se tiene que $O_2Q' = k\ O_1Q$, pero $O_1Q = O_1P = r$ por ser radios de la circunferencia C; por lo tanto, $O_2Q' = k\ O_1P = kr$, que es el radio de la circunferencia C' con centro en O_2 y por tanto Q' está en la circunferencia C', como se quería demostrar.

Ahora, surge ahora la pregunta, dadas dos circunferencias cualesquiera, ¿existirá una homotecia que lleve una en la otra?

Teorema 3.8.2 Dos circunferencias no concéntricas son homotéticas en dos formas. Los dos centros de homotecia son conjugados armónicos con respecto a los centros de los círculos. A los centros de homotecia se les llama centro interno o externo, dependiendo de que estén en el interior o en el exterior del segmento determinado por los centros de las circunferencias.

Demostración:

Sean C y C' dos circunferencias con centro en O y O' y radios r y r', respectivamente. Para encontrar los centros de homotecia que llevan a la circunferencia C en la circunferencia C', se selecciona un punto P cualquiera en C y se traza la recta OP. Se traza la paralela a OP por O'. Sean P' y P'' las intersecciones de esta paralela con la circunferencia C'. Se trazan las rectas PP' y OO', que no son paralelas si $r \neq r'$. Supóngase que este es el caso, posteriormente se verá el caso cuando $r = r'$. Sea K el punto de intersección de estas dos rectas. Sea ahora H la intersección de la recta OO' con la recta PP''. Los puntos H y K son dos centros de homotecia para C y C'.

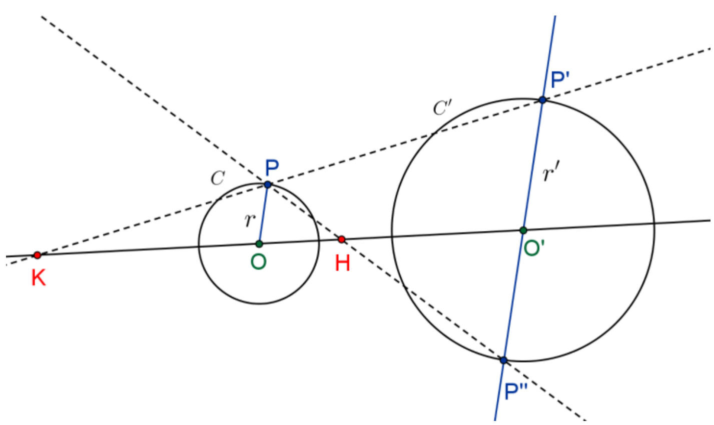


Figura 3.38

Ya que OP y OP' son paralelas, los triángulos KOP y $KO'P'$ son semejantes, tienen tres ángulos iguales, y $\frac{KO}{KO'} = \frac{OP}{O'P'} = \frac{KP}{KP'}$, de donde $\frac{KO}{KO'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{OK}{KO'} = -\frac{r}{r'}$.

Además, *K*, *P* y *P′* son colineales al igual que *K*, *O* y *O′*. Adicionalmente se tiene que, $\frac{KO}{KO'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{KO'}{KO} = \frac{r'}{r} \Rightarrow KO' = \frac{r'}{r} KO$ y $\frac{KP}{KP'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{KP'}{KP} = \frac{r'}{r} \Rightarrow KP' = \frac{r'}{r} KP$.

Esto es, $H_{K,k}(O) = O'$ y $H_{K,k}(P) = P'$, donde $k = \frac{r'}{r}$. Por el teorema 3.8.1, *C′* es la circunferencia homotética a *C* con centro de homotecia *K* y constante de homotecia $k = \frac{r'}{r}$. Al punto *K* se le llama el centro externo de homotecia, ya que divide a *OO′* externamente.

Ahora bien, los triángulos *HOP* y *HO′P″* son semejantes, de donde se obtiene de manera análoga que $\frac{OH}{HO'} = \frac{r}{r'}$ y $H_{H,k}(O) = O'$ y $H_{H,k}(P) = P''$ con $k = -\frac{r'}{r}$ y *C′* es la circunferencia homotética a *C* con centro de homotecia *H* y constante de homotecia $k = -\frac{r'}{r}$. Además, *H* y *K* son conjugados armónicos respecto de *O* y *O′*.

Ahora bien, si *r* = *r′*, entonces *PP′* es paralela a *OO′* y *K*, el centro de homotecia externo, es el punto al infinito en esa dirección y *k* = 1. El centro de homotecia interno *H* es el punto medio de *OO′* y *k* = -1. *H* y *K* son también conjugados armónicos. Observe que esta transformación es igual a una traslación que lleva a *O* en *O′*.

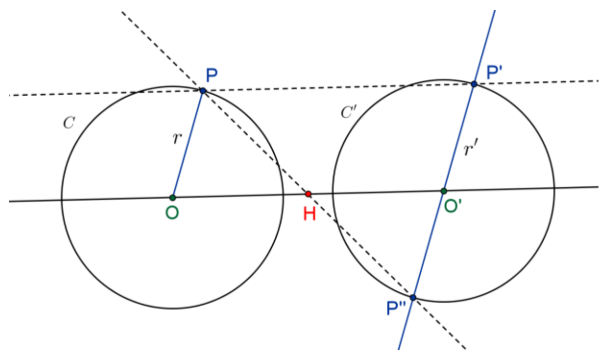


Figura 3.39

Dos circunferencias concéntricas son también homotéticas de dos formas, el centro de los círculos es centro de homotecia doble y una de las razones de homotecia es la razón de sus radios y la otra es menos la razón de los radios. (Actividad 39, 1)

Si las circunferencias tienen tangentes comunes entonces pasan por los centros de homotecia. (Actividad 39, 2)

Puntos homólogos y antihomólogos

Si una recta que pasa por un centro de homotecia de dos circunferencias corta a una de ellas en dos puntos, entonces corta a la otra también en dos puntos. Estos cuatro puntos son homotéticos por pares y a cada pareja de puntos homotéticos se les llama homólogos. A cada par de puntos que estén en la recta que pasa por un centro de homotecia, uno en cada circunferencia y que no sean homotéticos se les llama antihomólogos. En la figura 3.40 sea *l* una recta que pasa por *K*, centro de homotecia de *C* y *C′*, y corta a la circunferencia *C* en dos puntos *P* y *Q*. Entonces corta también a *C′* en dos puntos, *P′* y *Q′*, los homotéticos u homólogos de *P* y *Q* desde *K*, respectivamente. Los puntos *P* y *Q′*, así como los puntos *Q* y *P′* que están en la misma recta y no son homotéticos se denominan antihomólogos.

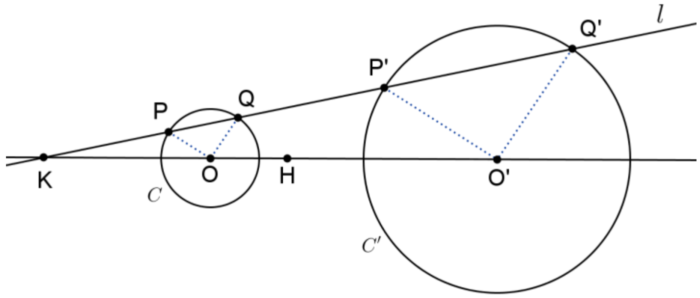


Figura 3.40

En la figura 3.41 la recta *l* pasa por el otro centro de homotecia *H* y los puntos homólogos son *P* y *P′* y *Q* y *Q′*. Los puntos antihomólogos son *P* y *Q′* y *Q* y *P′*.

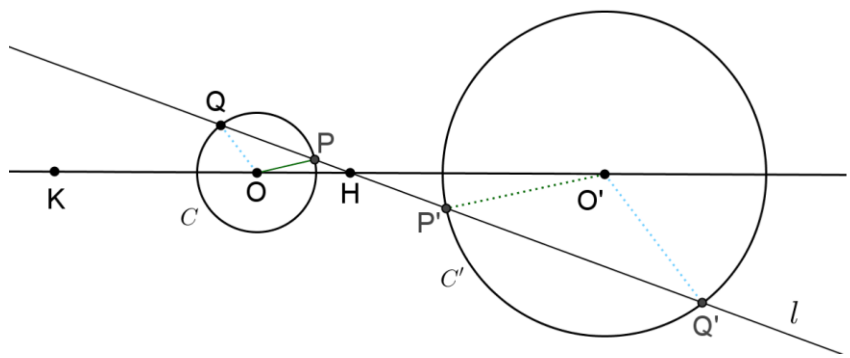


Figura 3.41

Propiedades de los puntos homólogos y antihomólogos

En la figura 3.42, *l* y *m* son dos rectas que pasan por *K* y que cortan a las circunferencias en *P, Q; P′* y *Q′* y en *R*, *S*, *R′* y *S′* respectivamente. Los puntos *P* y *P′*, *Q* y *Q′*, *R* y *R′*, *S* y *S′* son respectivamente homotéticos u homólogos. Los puntos *P* y *Q′*, *Q* y *P′*, *R* y *S′*, *S* y *R′* son antihomólogos.

Teorema 3.8.3

a) *PR es paralela a P′R′ y QS es paralela a Q′S′.*
b) *Los triángulos KPR y KP′R′, así como los triángulos KQS y KQ′S′ son directamente semejantes.*
c) *Los cuadriláteros PRS′Q′ y QSR′P′ son cíclicos.*

d) El producto KP × KQ′ es constante.

e) Las tangentes a las circunferencias en P y Q′ forman ángulos iguales con la recta PQ′ y si se intersecan en el punto A el $\Delta PAQ'$ *es isósceles.*

Demostración:

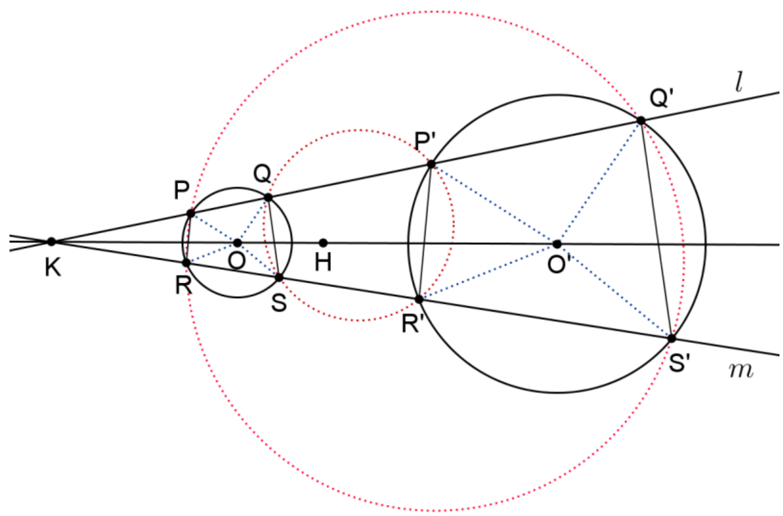


Figura 3.42

a) Ya que *P′* y *R′* son los homotéticos de *P* y *R* y *Q′* y *S′* los de *Q* y *S*, por el teorema 3.7.1, *PR* es paralela a *P′R′* y *Q′S′* es paralela a *QS*.

b) Por el resultado anterior se tiene que los tres ángulos de los triángulos *KPR* y *KP′R′*, así como los triángulos *KQS* y *KQ′S′* son iguales respectivamente y por tanto los triángulos son semejantes.

c) Para demostrar que el cuadrilátero *PRS′Q′* es inscriptible se demostrará que $\angle Q'PR + \angle RS'Q' = 180°$.

   Se tiene que:

   $\angle QPR + \angle RSQ = 180°$, por ser el cuadrilátero *PRSQ* inscriptible,

   $\angle RSQ = \angle RS'Q'$, ya que *QS* y *Q′S′* son rectas paralelas, por tanto,

   $\angle QPR + \angle RS'Q' = 180°$, pero $\angle QPR = \angle Q'PR$ por ser *Q′, Q* y *P* colineales,

   por tanto $\angle Q'PR + \angle RS'Q' = 180°$, como se quería demostrar.

   De manera análoga se demuestra que el cuadrilátero *QSP′R′* es también inscriptible.

d) Ya que el cuadrilátero *PRS′Q′* es inscriptible, *KP* × *KQ′* es la potencia de *K* con respecto a la circunferencia por *PRS′Q′* y por tanto es constante.

e) Sean t_1 y t_2 las tangentes a las circunferencias en *P* y *Q′* respectivamente; por tanto, $OP \perp t_1$ y $OQ' \perp t_2$. Además, los triángulos *OPQ* y *O′P′Q′* son isósceles y semejantes, por tanto, $\angle OPQ = \angle OQP = \angle OP'Q' = \angle OQ'P'$. De donde se tiene que $\angle APQ' = \angle PQ'A$ y el $\Delta\, PAQ'$es isósceles.

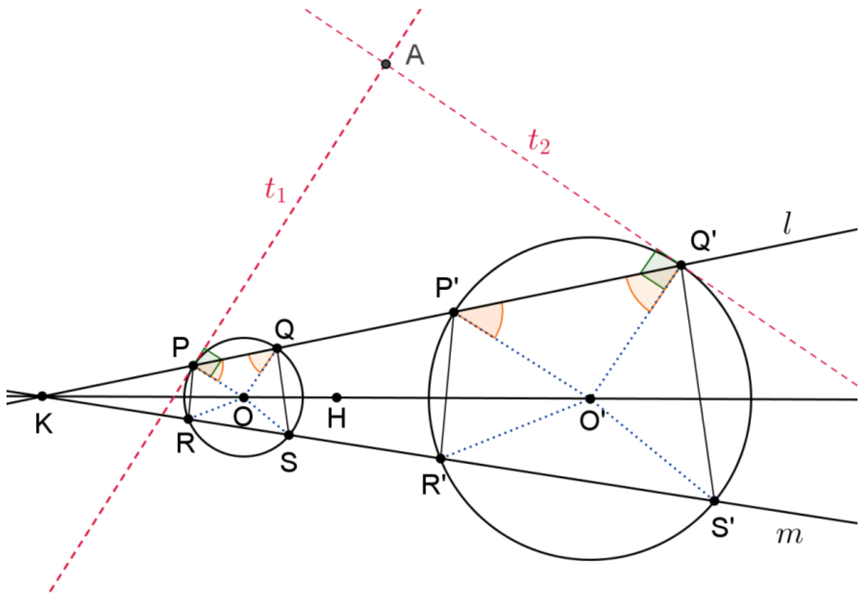


Figura 3.43

Circunferencia de los 9 puntos

Teorema 3.8.4 Dado un triángulo ABC, su triángulo mediano y su triángulo órtico tienen el mismo circuncírculo.

Demostración:

Sean *ABC* un triángulo, *L*, *M* y *N* los puntos medios de los lados *BC*, *CA* y *AB* respectivamente y sean *D*, *E* y *F* los pies de las alturas en estos mismos lados. Se demostrará, en primera instancia, que el circuncírculo del ∆*LMN* pasa por el punto *D*, pie de la altura por el vértice *A*.

Se trazan las rectas *NM*, *ML* y *ND*. Se tiene entonces que *NM* es paralela a *DL* y *NM* = *BL* y que *ML* es paralela a *NB* y *ML* = *NB* (Actividad 15, 1), *NB* = *ND* ya que el triángulo es rectángulo y *N* es punto medio de su hipotenusa.

Entonces, el cuadrilátero *NDLM* es un trapecio isósceles y por tanto es inscriptible (Actividad 25, 1). Esto es, el circuncírculo del ∆*LMN*, pasa también por el punto *D*, pie de la altura por el vértice *A*. De manera análoga se puede demostrar que este circuncírculo pasa también por los puntos *E* y *F*, con lo cual queda demostrado el teorema.

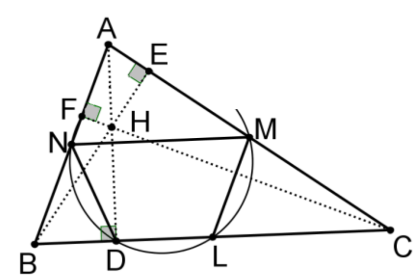


Figura 3.44

Teorema 3.8.5 Dado un triángulo ABC, su triángulo mediano pasa por los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo, a los que se llama puntos de Euler del triángulo.

Demostración:

Sea ABC un triángulo; L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente; D, E y F los pies de las alturas sobre los mismos lados. Sean G el centroide, O el circuncentro y H el ortocentro del ΔABC. Sea J el circuncentro del ΔLMN.

El circuncírculo del ΔLMN pasa por los puntos D, E y F. Además, por la propiedad del centroide de trisecar las medianas $\frac{GA}{GL} = \frac{GB}{GM} = \frac{GC}{GN} = -\frac{2}{1}$.

Por tanto, ΔABC es homotético al ΔLMN, con centro de homotecia en G y razón de homotecia -2 y el circuncírculo C_1 del ΔABC es homotético al circuncírculo C_2 del triángulo ΔLMN, con centro de homotecia en G *y razón de homotecia -2*.

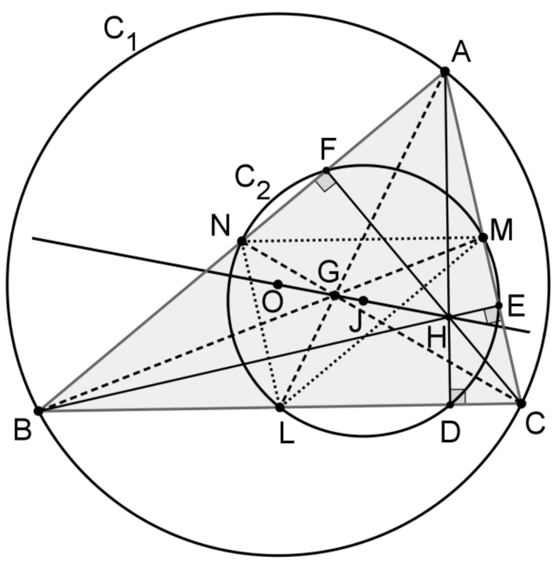


Figura 3.45

Esto implica:

- J está en la recta de Euler del ΔABC.
- Además, $\frac{OG}{GJ} = 2$, ya que el centro de homotecia interno divide la línea de los centros en la razón $-k$, donde k es la razón de homotecia, que en este caso es igual a -2.
- Ya que $HG = 2GO$, se tiene que $HG = -4GJ$, por tanto,

$$\frac{OH}{HJ} = \frac{OG+GH}{HG+GJ} = \frac{2GJ+4GJ}{-4GJ+GJ} = -2,$$

Por lo tanto, el centro externo de homotecia es H, y por tanto A es el homotético del punto P en la recta AH tal que $HA = 2HP$, esto es, es el homotético del punto medio de HA, es decir del punto de Euler en la altura A.

Circunferencia de similitud de dos circunferencias

Definición 3.8.1 La circunferencia de similitud de dos circunferencias no concéntricas y de radios diferentes, es la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une sus centros de homotecia, también llamados centros de similitud.

Actividad 39

Demuestre:

1. Dos circunferencias concéntricas son homotéticas de dos formas con su centro como centro de homotecia doble. Una de las razones de homotecia es la razón de sus radios y la otra es menos la razón de los radios.
2. Si las circunferencias tienen tangentes comunes entonces pasan por los centros de homotecia.
3. Si una circunferencia es tangente a dos circunferencias no concéntricas, los puntos de tangencia son antihomólogos.
4. Si dos circunferencias se intersecan, el ángulo formado por los radios a uno de sus puntos de intersección es bisecado por las rectas que unen este punto de intersección con los centros de homotecia.
5. La circunferencia de similitud de dos circunferencias que se intersecan, pasa por sus puntos de intersección.
6. La circunferencia de similitud de dos circunferencias no concéntricas y de radios diferentes es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales las dos circunferencias subtienden ángulos iguales.
7. Dadas dos circunferencias no concéntricas y de radios iguales, la mediatriz del segmento que tiene como extremos los centros de las circunferencias, tiene la propiedad de que la razón de las distancias de sus puntos a los centros de las circunferencias está en la razón de sus radios.
8. El lugar geométrico de los puntos tales que la razón de sus distancias a dos puntos fijos es constante, es una circunferencia. A esta circunferencia se le llama el círculo de Apolonio de los puntos fijos.
9. La bisectriz del ángulo A del triángulo ABC, corta BC en L. Si C describe una circunferencia cuyo centro es A y B permanece fijo, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos L?
10. El centro de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo ABC, J en la figura 3.45, es el punto medio del segmento determinado por el ortocentro y el circuncentro del mismo triángulo, H y O en la misma figura.

Actividad 40

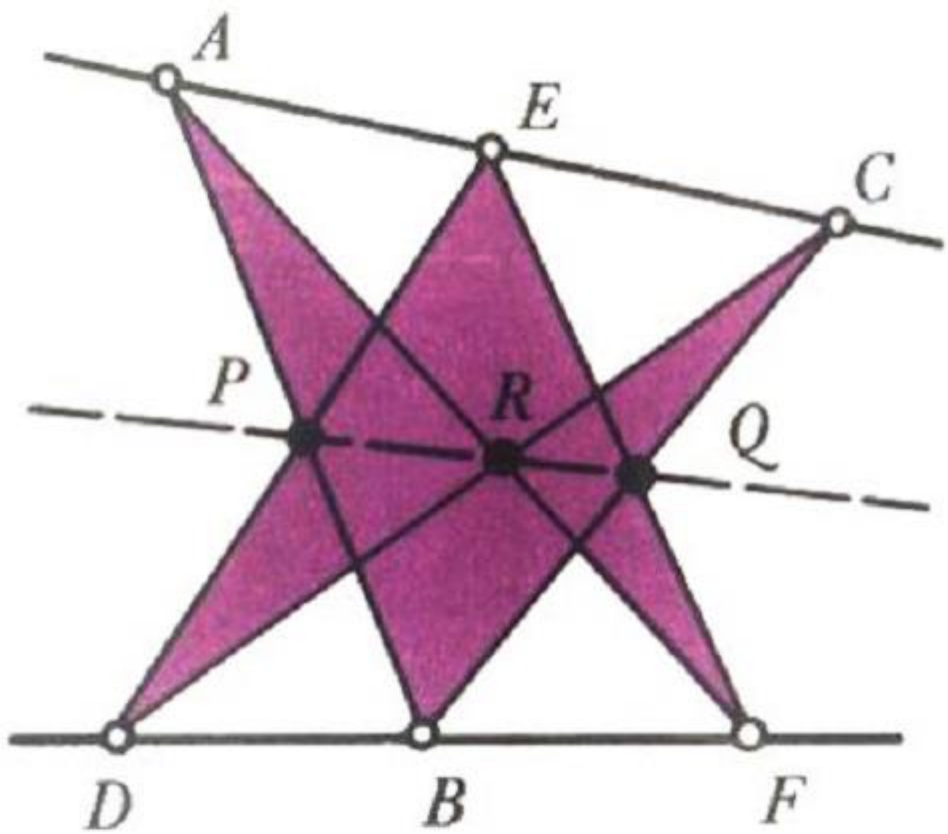
1. Construir una circunferencia tangente a dos rectas dadas y que pase por un punto dado P. ¿Es única la solución?
2. Construir un triángulo, dados su base, su altura y la razón de sus lados.

3. En una semicircunferencia inscribir un cuadrado que tenga dos de sus vértices en el diámetro y los otros dos en la circunferencia.
4. Construir una circunferencia que pase por dos puntos dados y sea tangente a una recta dada.

UNIDAD CUATRO

Algunos teoremas importantes

4.1 Teoremas de Ceva y Menelao
4.2 Teorema de Desargues
4.3 Cuadrángulos y cuadriláteros completos
4.4 Cuadrángulo completo
4.5 Cuadrilátero completo
4.6 Dualidad



Teorema de Pappus

4.1 Teoremas de Ceva y Menelao

Los llamados *teoremas de configuración* expresan las relaciones entre un número finito de puntos y de rectas.

En general un teorema de configuración se formula de tal forma que del hecho de que algunos puntos son colineales o bien algunas de las rectas son concurrentes, se deduce que algunos otros puntos son colineales o algunas otras rectas son concurrentes.

Los teoremas de Ceva y Menelao son herramientas que permiten trabajar muchos problemas en los que intervienen la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas. Ambos están estrechamente relacionados, aun cuando el de Menelao es del siglo primero y el de Ceva del siglo XVII.

Una recta que pasa por un vértice de un triángulo pero que no coincide con ningún lado, se llama usualmente ***recta ceviana*** del triángulo.

Un punto que esté en un lado de un triángulo, pero que no coincida con ningún vértice, se llama usualmente ***punto de Menelao*** del triángulo para dicho lado.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Ceva) Tres cevianas AL, BM y CN de un triángulo ABC son concurrentes en el punto O si y sólo si:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

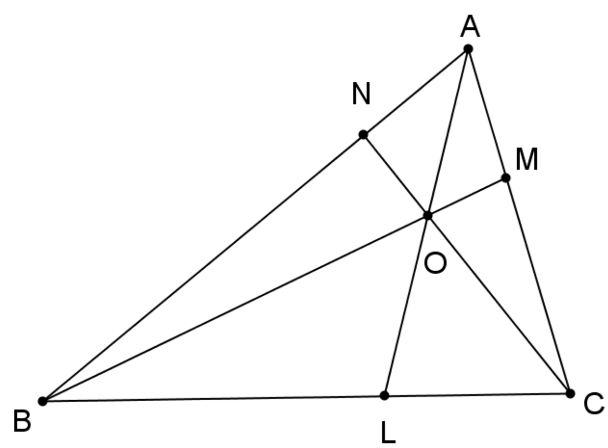


Figura 4.1

Demostración: Se traza por *A* una paralela a *BC*. Sean *S* y *T* las intersecciones de *BM* y *CN* con esta paralela, respectivamente.

$\Delta\, BLO \sim \Delta\, SAO,$

$$\frac{BL}{LO} = \frac{SA}{AO}; \quad (1)$$

$\Delta\, OLC \sim \Delta\, OAT,$

$$\frac{OL}{LC} = \frac{OA}{AT}; \quad (2)$$

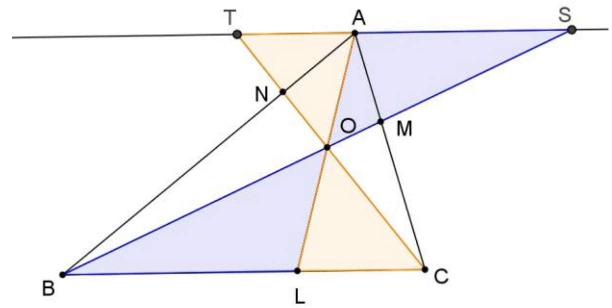


Figura 4.2

$\Delta\, CMB \sim \Delta\, AMS,$

$$\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{SA}; \quad (3)$$

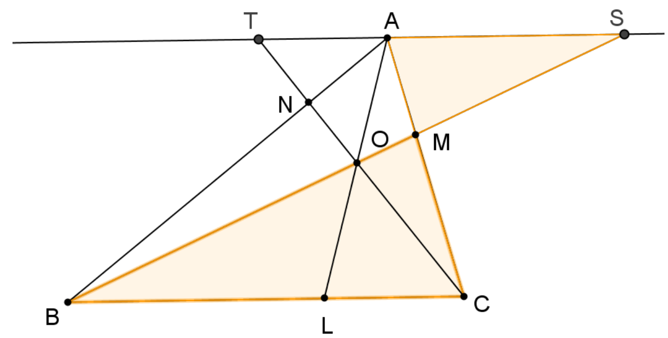


Figura 4.3

$\Delta\, ANT \sim \Delta\, BNC,$

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AT}{BC}; \quad (4)$$

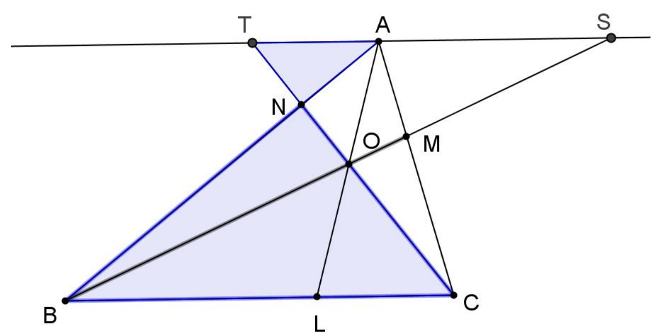


Figura 4.4

Multiplicando (1), (2), (3) y (4), se obtiene:

$$\frac{BL}{LO} \cdot \frac{OL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{SA}{AO} \cdot \frac{OA}{AT} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{AT}{BC}, \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Inversamente, supóngase que *L*, *M* y *N* son tres puntos en los lados *BC*, *CA* y *AB* del triángulo *ABC* y que la relación anterior se satisface. Sea *O* el punto de intersección de *BM* y *CN*. Se traza la recta *AO*. Sea *L’* el punto de intersección de *AO* con *BC*. Por el teorema de Ceva:

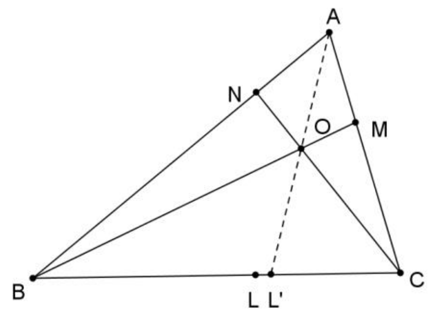


Figura 4.5

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1,$$

por tanto,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1,$$

de donde,

$$\frac{BL'}{L'C} = \frac{BL}{LC},$$

y por el teorema 3.2.1 se tiene que *L* = *L’*.

Teorema 4.1.2 (Teorema de Menelao) Si una recta interseca los tres lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos L, M y N respectivamente, entonces:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1,$$

e inversamente si L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, para los cuales se cumple la relación anterior, entonces los tres puntos son colineales.

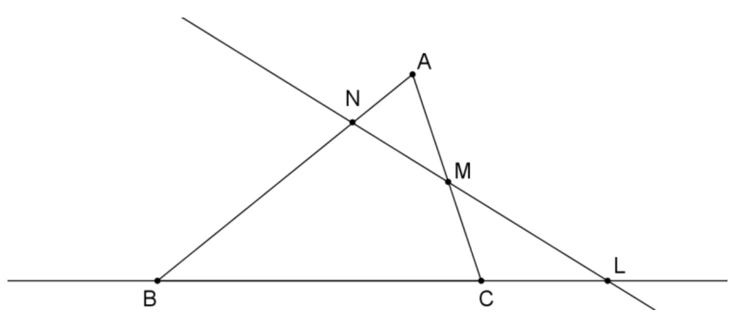


Figura 4.6

Demostración: Sean *P*, *Q* y *R* los pies de las perpendiculares desde *A*, *B* y *C* a la recta determinada por *L*, *M* y *N*.

$\Delta\, ANP \sim \Delta\, BNQ,$

$\frac{AN}{NB} = \frac{PA}{BQ};$ *(1)*

$\Delta\, BLQ \sim \Delta\, CLR,$

$\frac{BL}{LC} = \frac{QB}{CR};$ *(2)*

$\Delta\, CMR \sim \Delta\, AMP,$

$\frac{CM}{MA} = \frac{RC}{AP};$ *(3)*

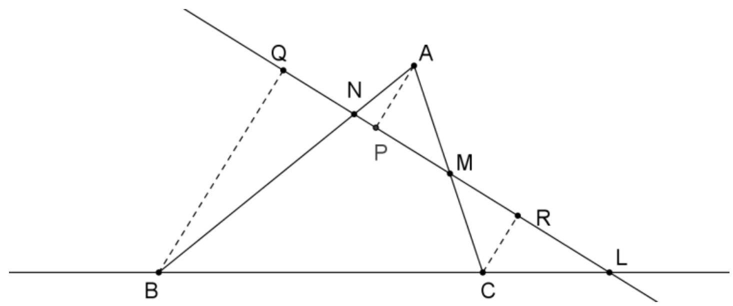


Figura 4.7

Multiplicando (1), (2) y (3), se obtiene:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{PA}{BQ} \cdot \frac{QB}{CR} \cdot \frac{RC}{AP} = -1,$$

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

El recíproco se demuestra en forma análoga al del inverso de Ceva.

Tanto el teorema de Ceva como el de Menelao tienen una forma trigonométrica.

Teorema 4.1.3 (Forma trigonométrica del teorema de Ceva) Si la hipótesis del teorema de Ceva se satisface, entonces:

$$\frac{sen\, ACN}{sen\, NCB} \cdot \frac{sen\, BAL}{sen\, LAC} \cdot \frac{sen\, CBM}{sen\, MBA} = 1;$$

e inversamente, si L, M y N son puntos respectivamente en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, para los cuales es válida la relación anterior, entonces AL, BM y CN son concurrentes.

Teorema 4.1.4 (Forma trigonométrica del teorema de Menelao) Si la hipótesis del teorema de Menelao se satisface, entonces:

$$\frac{sen\, ACN}{sen\, NCB} \cdot \frac{sen\, BAL}{sen\, LAC} \cdot \frac{sen\, CBM}{sen\, MBA} = -1;$$

e inversamente, si L, M y N son puntos respectivamente en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, para los cuales es válida la relación anterior, entonces L, M y N son colineales.

Estos dos teoremas se demuestran a partir de los teoremas de Ceva y Menelao, en sus formas no trigonométricas, utilizando el teorema de la bisectriz generalizada.

Teorema 4.1.5 (Teorema de la división interna y externa) Si P, L y M son puntos respectivamente en los lados AB, BC y CA del triángulo ABC, tales que AL, BM y CP son concurrentes y si la recta LM interseca AB en Q, entonces los puntos P y Q son conjugados armónicos con respecto al segmento AB.

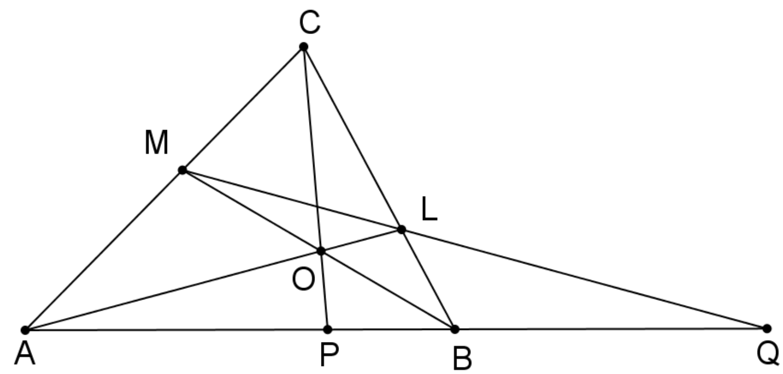


Figura 4.8

Demostración: Ya que *AL*, *BM* y *CP* son concurrentes, por el teorema de Ceva se tiene que,

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Ya que *L*, *M* y *Q* son colineales, por el teorema de Menelao se tiene que,

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

Se tiene entonces que,

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB},$$

por lo que *P* y *Q* son conjugados armónicos respecto del segmento *AB*.

De este resultado se puede deducir que dado un segmento *AB* y un punto *P* se puede construir el construir el conjugado armónico de *P* con respecto de *AB.*

Se selecciona un punto cualquiera *C* que no esté en la recta *AB* y se trazan las rectas *CA, CB* y *CP*. Se traza una recta por *A* que no pase por *B* y sean *L* y *O* sus intersecciones con *BC* y *CP* respectivamente.

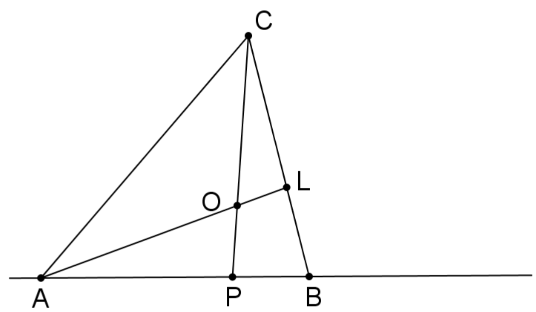


Figura 4.9

Sea M la intersección de BO con AC. Entonces Q, la intersección de LM con AB es el conjugado armónico de P con respecto a AB.

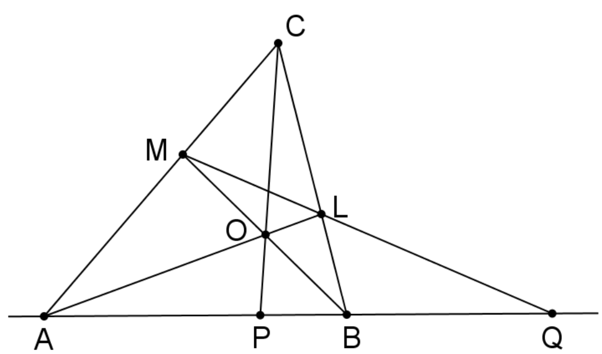


Figura 4.10

Cabe hacer notar que dado que el conjugado armónico de un punto dado P, con respecto a dos puntos fijos, A y B, es único, independientemente de la selección del punto C y de la de la recta por A, la recta ML corta AB en el punto Q.

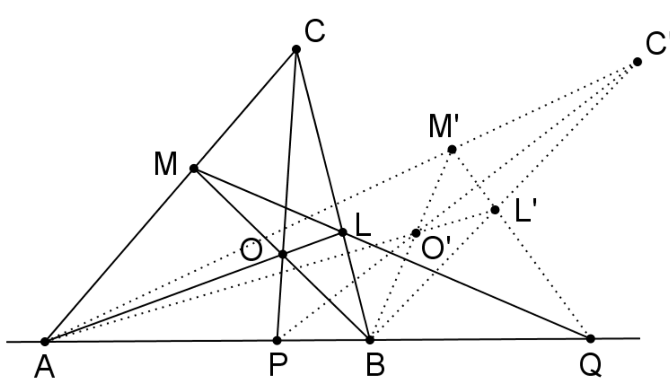


Figura 4.11

Actividad 41

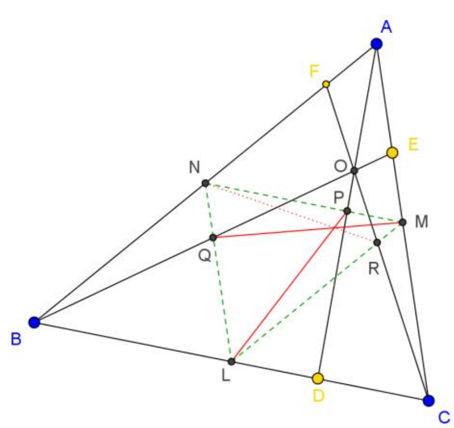
Demuestre:

5. Usando los resultados de esta sección que:
    a. Las medianas de un triángulo son concurrentes.
    b. Las seis bisectrices de los ángulos exteriores e interiores de un triángulo, pasan por tercias por cuatro puntos.
    c. Las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo cortan los lados opuestos en tres puntos colineales.
6. Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC y si BQ y CP se intersecan en O, entonces AO es una mediana.
7. En la figura del Teorema de Ceva, se tiene que:

$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1.$$

8. Si P es el punto medio del lado BC del triángulo ABC, Q y R son puntos cualesquiera en AC y AB de tal forma que BQ y CR se corten en AP, entonces QR es paralelo a BC.
9. Si la circunferencia inscrita del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en P, Q y R respectivamente, entonces las rectas AP, BQ y CR son concurrentes. El punto de concurrencia es llamado el punto de Gergonne del triángulo.
10. Sean L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, respectivamente. Sean D, E y F tres puntos sobre estos lados tales que AD, BE y CF son concurrentes. Si P, Q y R son los puntos medios de AD, BE y CF respectivamente, demuestre que PL, QM y RN son concurrentes.

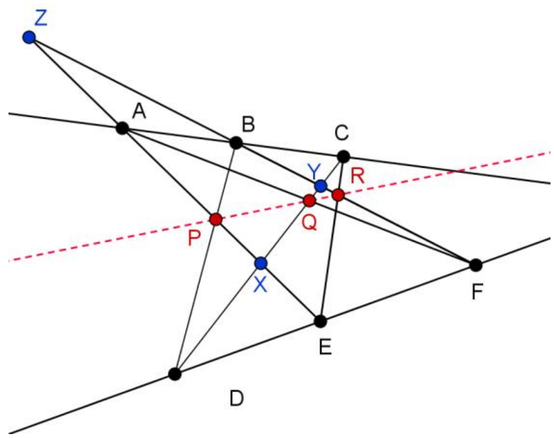
    Hint:



11. Si una circunferencia corta a los lados *BC*, *CA* y *AB* del triángulo *ABC* en los puntos *P*, *P*'; *Q*, *Q*'; *R*, *R*', respectivamente, y si *AP*, *BQ* y *CR* son concurrentes, entonces *AP*', *BQ*' y *CR*' son concurrentes.

12. Si *A*, *B*, *C*, son tres puntos colineales y *D*, *E*, *F* son otros tres puntos colineales, y si las intersecciones de las rectas *AE*, *Af*, *BF* con las rectas *DB*, *DC*, *EC*, son los puntos *P*, *Q* y *R*, respectivamente, entonces éstos son colineales. A esta propiedad se le llama el **teorema del hexágono de Pappus**.

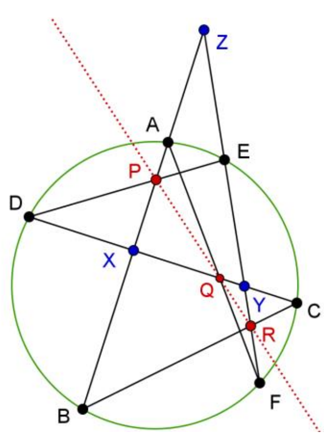
    Hint: Considera el triángulo *XYZ*.



13. Si *A*, *C*, *E* son tres puntos que están sobre una recta y *B*, *D*, *F* están sobre otra recta, y si las rectas *AB* y *CD* son paralelas a *DE* y *FA*, respectivamente, demuestre que *EF* es paralela a *BC*.

14. Los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una circunferencia son colineales. La recta que contiene estos puntos es llamada recta de Pascal del hexágono y este teorema es conocido como **teorema de Pascal**.

    Hint: Considera el triángulo *XYZ*.



Actividad 42

Realice las siguientes construcciones usando únicamente regla:

1. Dado un segmento de recta *AB* y su punto medio, trace una paralela a *AB* que pase por un punto dado *P*.
2. Dadas dos rectas paralelas y el segmento *AB* en una de ellas. Encuentre el punto medio de *AB*.
3. Dadas dos rectas paralelas y un punto *P* que no esté en ellas, trace una paralela a las dadas.
4. Dadas dos rectas paralelas y un segmento *AB* en una de ellas, triplicar el segmento *AB*.
5. Dadas dos rectas paralelas y un segmento *AB* en una de ellas, dividir en 3 el segmento *AB*.

4.2 Teoremas de Desargues

El Teorema de Desargues está íntimamente ligado con el estudio de la perspectiva. Se dice que dos figuras están en perspectiva si las rectas que unen puntos correspondientes de las dos figuras son concurrentes. A este punto de concurrencia se le llama el centro de perspectiva de las dos figuras.

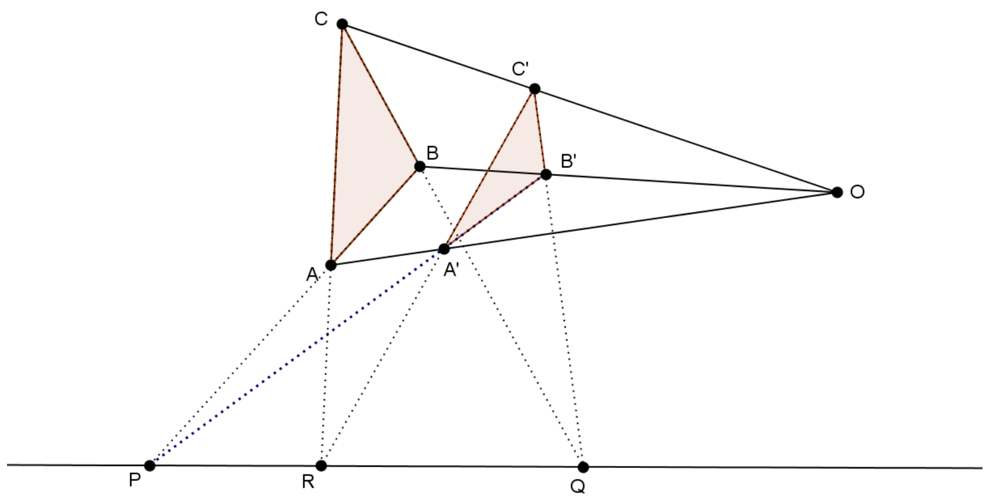
Desargues, (1591-1661), arquitecto e ingeniero militar de Lyon, por un tiempo integrante del grupo francés de matemáticos de esa época, entre los que se contaban Descartes y Fermat. En 1636 Desargues publicó un texto en el que presentaba un método geométrico para construir imágenes en perspectiva de los objetos. Su trabajo más importante, publicado en 1639, fue un tratado sobre el estudio de las cónicas a través de métodos proyectivos, es decir de sus invariantes bajo proyecciones (*Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan)*.

Desargues concebía la geometría proyectiva como una extensión natural de la geometría euclidiana en la que las rectas paralelas se cortaban en el infinito. En parte, por el rompimiento que significaba con la concepción de la época en la que no parecía posible que se pudiera decir algo sobre las cónicas que no fuera dicho más fácilmente a través del álgebra, y en parte por el rebuscado lenguaje que usó para escribir su tratado, sus planteamientos no fueron aceptados en la época y de permanecieron prácticamente olvidados por cerca de 200 años.

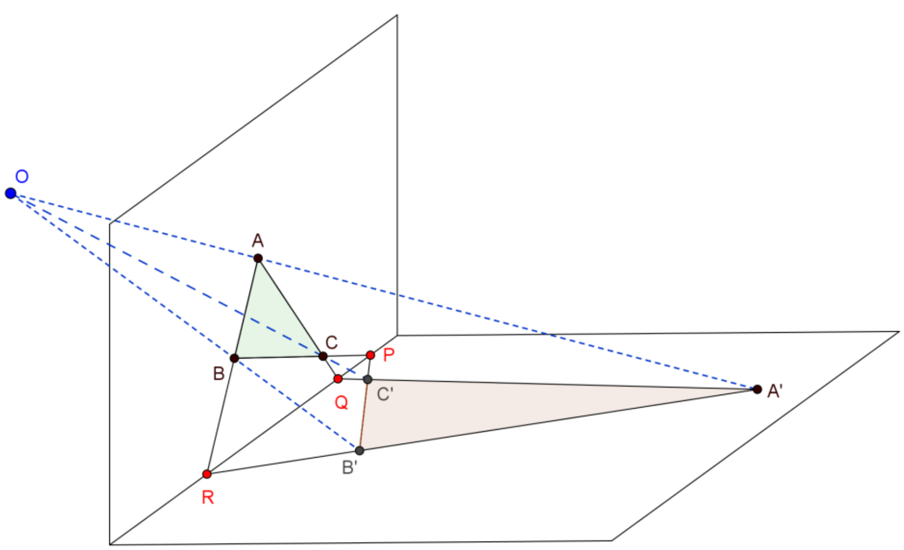
Aún ahora, Desargues no es conocido generalmente por su tratado sino por una proposición que no aparece en él, el llamado Teorema de Desargues.

A pesar de la sencillez de la figura, constituida sólo por puntos y rectas y que la demostración para triángulos que no están en el mismo plano depende únicamente de las relaciones de incidencia y es bastante sencilla, la demostración para triángulos que están en el mismo plano no lo es tanto. Por ello, aun cuando el teorema de Desargues es una propiedad netamente proyectiva su demostración se realizará aquí utilizando el teorema de Menelao.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Desargues) Si en un plano dos triángulos ABC y A'B'C' están en perspectiva desde un punto O, los lados correspondientes se cortan en tres puntos colineales P, Q y R.



El Teorema de Desargues en el plano



El Teorema de Desargues en el espacio

Figura 4.12

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos en perspectiva con O como centro de perspectiva. Sean P la intersección de AB y $A'B'$, Q la de BC y $B'C'$ y R la de CA y $C'A'$. Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo ABO con $B'A'P$ como transversal se obtiene

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1.$$

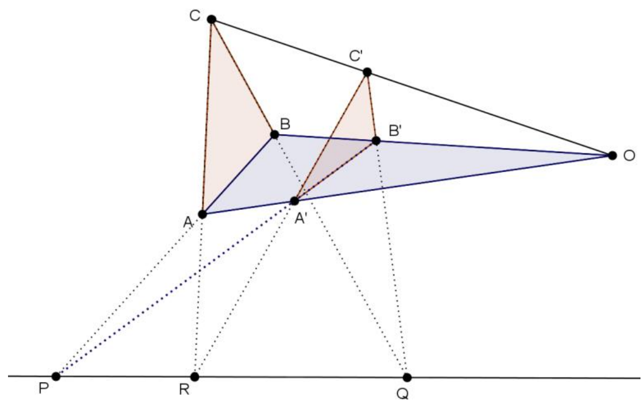


Figura 4.13

Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo BCO con $B'C'Q$ como transversal se obtiene

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1.$$

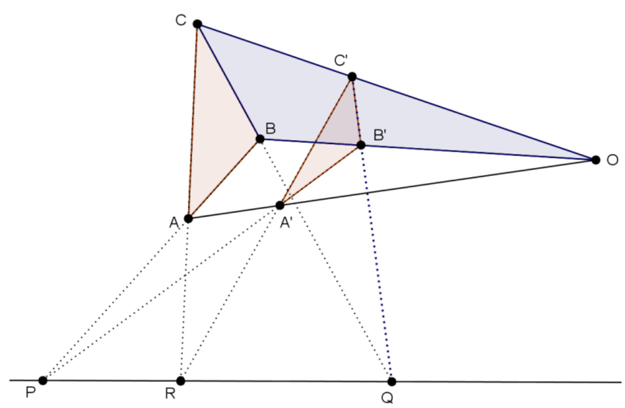


Figura 4.14

Si se aplica el teorema de Menelao al triángulo CAO con $A'C'R$ como transversal se obtiene

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1.$$

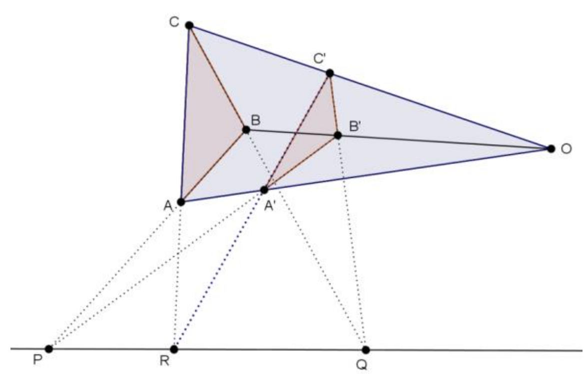


Figura 4.15

El producto de estas tres ecuaciones da como resultado:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1,$$

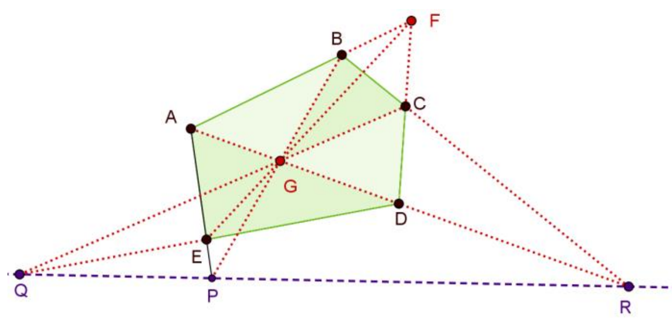
lo que demuestra que P, Q y R son colineales.

Actividad 43

1. Encuentre en la configuración de Desargues dos parejas de triángulos en perspectiva de tal forma que en un caso el centro de perspectiva sea alguno de los puntos P, Q y R de la figura 4.15 y en el otro caso sea alguno de los puntos *A, B, C, A′, B′, C′* de la misma figura. Diga en cada uno de los casos que recta es el eje de perspectiva.

2. Sean *ABCDE* un pentágono, *F* el punto de intersección de los dos lados no adyacentes *AB* y *CD*, *G* el punto de intersección de la diagonal *AD* con la recta *EF*, *P* el punto de intersección del lado *AE* con la recta *BG*, *Q* la intersección del lado *DE* con la recta *CG* y *R* la del lado *BC* con la diagonal *AD*. Demuestre que los puntos *P*, *Q* y *R* son colineales.

   Hint:



Teorema 4.2.2 (Recíproco del teorema de Desargues) Sean *ABC y A′B′C′* dos triángulos en el plano tales que las intersecciones de sus lados correspondientes P, Q y R son colineales, entonces los triángulos están en perspectiva.

Considérense los triángulos *AA′R* y *BB′Q,*

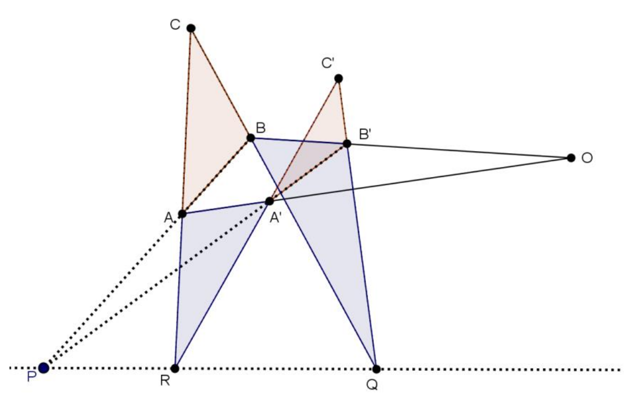


Figura 4.16

Estos triángulos están en perspectiva con *P* como centro de perspectiva y las intersecciones de sus lados correspondientes son O, C y C′, por tanto, estos puntos son colineales y los triángulos *ABC* y *A′B′C′* están en perspectiva con *O* como centro de perspectiva. A la recta en que están *P*, *Q* y *R* se le llama el eje de perspectiva.

Esta configuración está formada por 10 puntos y 10 rectas y tiene la característica de que cada recta tiene tres puntos de la configuración y por cada punto pasan tres rectas de la configuración; además, cada punto es centro de perspectiva de dos triángulos de la configuración y cada recta es eje de perspectiva de dos triángulos de la configuración.

Actividad 44

Demuestre que, si tres triángulos tienen un centro común de perspectiva, entonces sus ejes de perspectiva son concurrentes.

Actividad 45

1. Dadas dos rectas y un punto *P* que no se encuentra en ellas, con regla solamente trace la recta que pasa por *P* y el punto de intersección *A* de las rectas dadas, sin utilizar este punto *A*.
2. Construir un triángulo que esté en perspectiva con un triángulo dado y que sea semejante a otro triángulo dado.

4.3 Cuadrángulos y cuadriláteros completos

Hasta ahora se ha hablado de diferentes figuras geométricas sin hacer mayor reflexión sobre sus denominaciones. Entre estos casos destacan los triángulos y los cuadriláteros. Las denominaciones de estas figuras parten de raíces diferentes.

En el caso del *triángulo* su nombre describe a la figura a partir de la condición de que tiene tres ángulos (o sea tres vértices no colineales) y en consecuencia tiene tres lados, ya que tres puntos no colineales determinan tres rectas. Asimismo, los lados del triángulo se han considerado en ocasiones sólo como el segmento de que une dos vértices y en ocasiones como las rectas completas que unen los vértices.

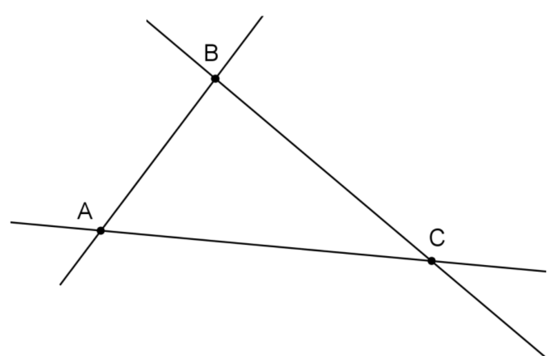


Figura 4.17

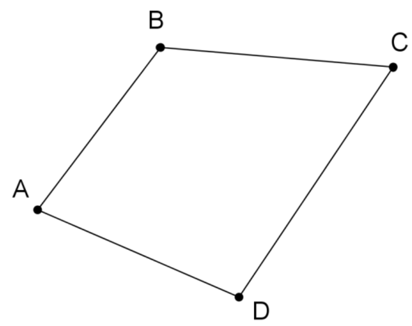


Figura 4.18

En el caso del cuadrilátero se ha considerado a la figura que tiene cuatro lados (o sea cuatro rectas no concurrentes por ternas) y cuatro vértices. Se observa que no se han considerado como vértices del cuadrilátero todos los puntos que son intersecciones de sus lados.

En forma análoga, se puede definir un trilátero como la figura formada por tres rectas, no concurrentes. Sus vértices se determinan por la intersección de estas tres rectas. De esta forma, un trilátero tiene tres vértices.

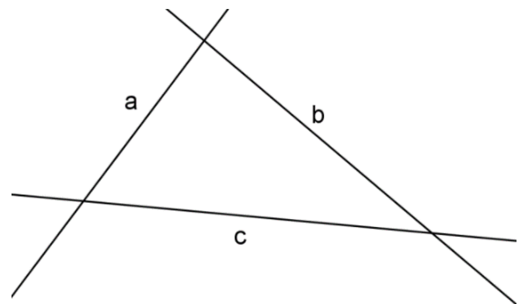


Figura 4.19

Lo anterior implica que un triángulo y un trilátero coinciden, tienen el mismo número de vértices y de lados.

Si se consideran, en forma análoga, un cuadrángulo, como la figura determinada por cuatro puntos no colineales por ternas y un cuadrilátero como la figura determinada por cuatro rectas, no concurrentes por ternas, se verá que estas dos figuras no tienen el mismo número de vértices, ni de lados.

Se seguirá llamando cuadrilátero a la figura que usualmente hemos denominado como tal y si se consideran como vértices a todos los puntos que son intersección de las rectas que lo definen, se le llamará cuadrilátero completo.

4.4 Cuadrángulo completo

Un cuadrángulo completo es una figura que consiste de cuatro puntos, ninguna terna colineal, y de las seis rectas determinadas por estos puntos. Los cuatro puntos son sus vértices y las seis rectas son sus lados. En la figura siguiente los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son sus vértices y las rectas *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD* y *CD* son sus lados.

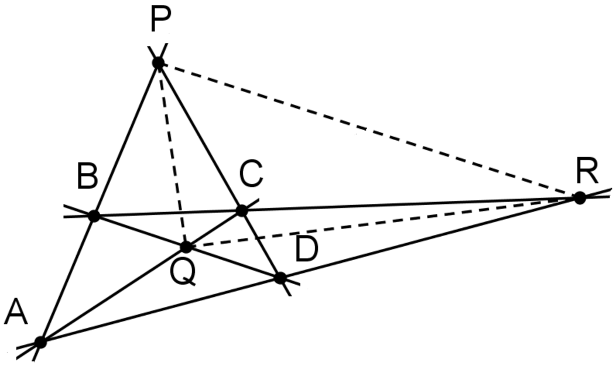


Figura 4.20

Se dice que dos lados son opuestos si no tienen ningún vértice en común. En un cuadrángulo completo hay tres pares de lados opuestos. En la figura los pares de lados *AB* y *CD*; *BC* y *AD*; *BD* y *AC* son opuestos. Los tres puntos determinados por los tres pares de lados opuestos se denominan como los puntos diagonales del cuadrángulo.

Los puntos *P*, *Q* y *R* de la figura son los puntos diagonales del cuadrángulo completo *A*, *B*, *C* y *D*. El triángulo determinado por estos tres puntos es el triángulo diagonal del cuadrángulo completo.

Teorema 4.4.1 Por cada punto diagonal de un cuadrángulo completo pasan cuatro rectas armónicas que son los dos lados que pasan por el punto y las rectas que lo unen con los otros dos puntos diagonales.

Demostración:

Sea *ABCD* un cuadrángulo completo y *P*, *Q* y *R* sus puntos diagonales. Se prolonga el lado del triángulo diagonal *PQ*, sea *T* el punto de intersección de este lado con el lado *AD* del cuadrángulo. Ya que *PT*, *AC* y *BD* son concurrentes en *Q* y *B*, *C* y *R* son colineales, se tiene que *T* y *R* son conjugados armónicos respecto de *A* y *D* (teorema 4.1.5) y entonces por el teorema 3.4.6, se tiene *P*(*AD*, *TR*) = -1.

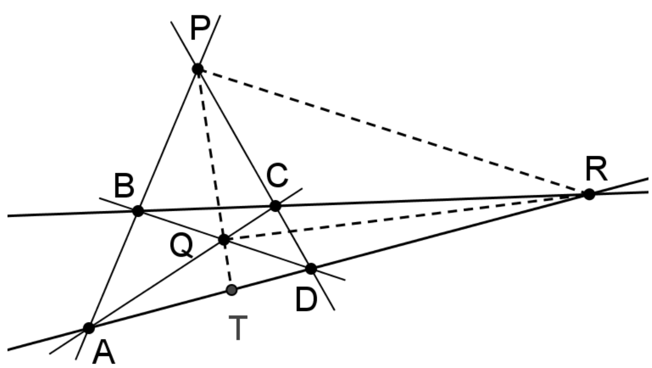


Figura 4.21

Las demostraciones para los haces con vértices en *R* y *Q* son análogas.

4.5 Cuadrilátero completo

Un cuadrilátero completo es una figura que consiste de cuatro rectas, ninguna terna concurrente, y de los seis puntos determinados por estas rectas. Las cuatro rectas son sus lados y los seis puntos son sus vértices. En la figura siguiente las rectas *a, b*, *c* y *d* son sus lados y los puntos $a \cap b$, $a \cap c$, $a \cap d$, $b \cap c$, $b \cap d$ y $c \cap d$ son sus vértices.

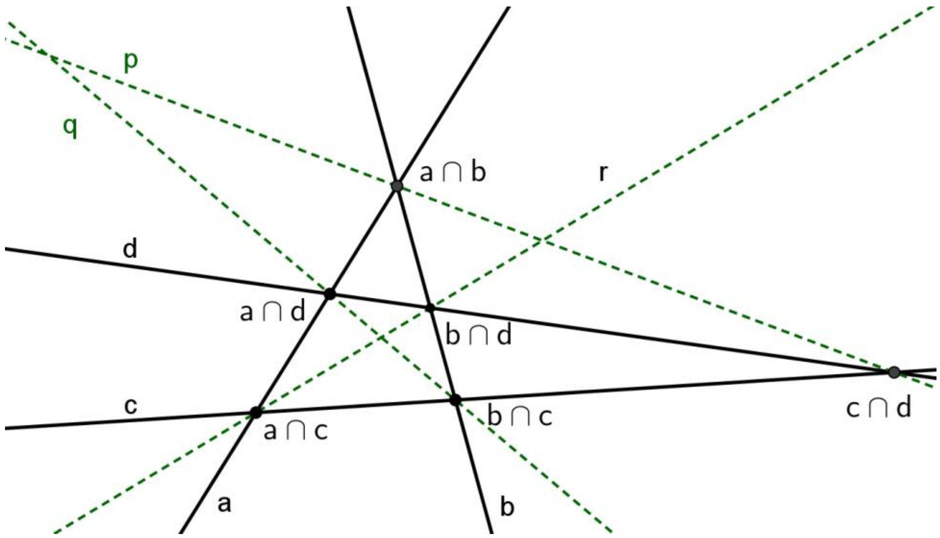


Figura 4.22

Se dice que dos vértices son opuestos si no están sobre el mismo lado. En un cuadrilátero completo hay tres pares de vértices opuestos. En la figura los pares de vértices $a \cap b$ y $c \cap d$; $b \cap c$ y $a \cap d$; $b \cap d$ y $a \cap c$ son puntos opuestos. Las tres rectas determinadas por los tres pares de vértices opuestos se denominan como las rectas diagonales del cuadrilátero. Las rectas *p*, *q* y *r* son las rectas diagonales del cuadrilátero completo *a*, *b*, *c* y *d*. El trilátero determinado por estos tres puntos es el trilátero diagonal del cuadrilátero completo. Observe que, ya que un trilátero es también un triángulo, se puede hablar del triángulo diagonal del cuadrilátero completo.

Teorema 4.5.1 En cada diagonal de un cuadrilátero completo hay una hilera armónica que consiste de los dos vértices en esa diagonal y los puntos en los cuales esta es intersecada por las otras dos diagonales

Demostración:

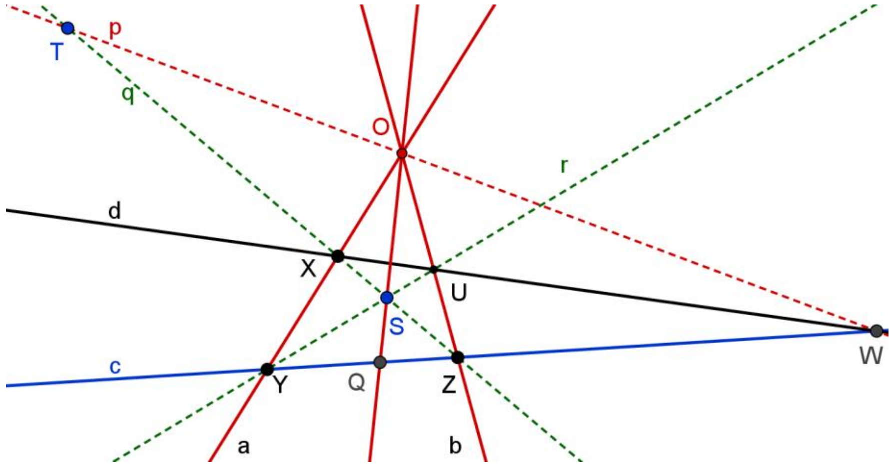


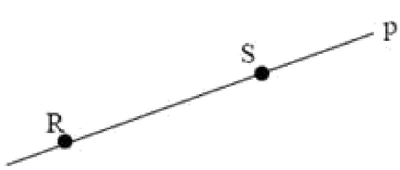
Figura 4.23

Sea el cuadrilátero de lados *a*, *b*, *c* y *d*. Sean *p*, *q* y *r* sus diagonales. Sean los puntos *T* = $p \cap q$, *S* = $q \cap r$. Sean $a \cap b = O$, $a \cap d = X$, $a \cap c = Y$, $b \cap c = Z$, $c \cap d = W$ y $b \cap d = U$. Se demostrará que (*TS*, XZ) = -1, esto es, que estos cuatro puntos son armónicos. Por construcción se tiene que *OQ*, *XZ* y *YU* son concurrentes y *X*, *U* y *W* colineales, por tanto, por el teorema 4.1.5 los puntos *Q* y *W* son conjugados armónicos respecto de *Y* y *Z*. Por el teorema 3.4.6, se tiene *O*(*YZ*, *QW*) = -1 y ya que la recta *q* corta al haz en *T*, *S*, *X* y *Z*, se tiene que también (*TS*, XZ) = -1, como se quería demostrar. La demostración para las otras diagonales es análoga.

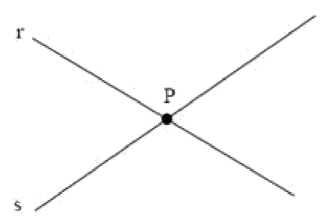
4.6 Dualidad

Uno de los conceptos importantes en Geometría Proyectiva es el conocido como principio de dualidad.

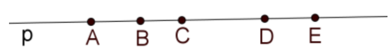
El principio de dualidad afirma que, a partir de cualquier teorema o construcción, de naturaleza proyectiva, podemos obtener otro, llamado dual, al intercambiar las palabras punto y recta y colineal por concurrente y si un teorema o propiedad es verdadera, entonces el dual también lo es.



Dos puntos R y S determinan una única recta p

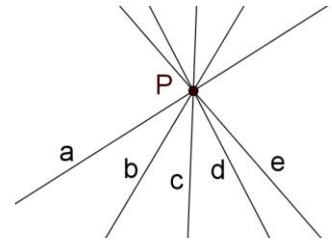


Dos rectas *r* y *s* determinan un único punto *P*



Una hilera de puntos consiste en un conjunto de puntos colineales, *A, B, C, D, E,* por ejemplo.

Tres puntos en el plano son colineales o determinan un triángulo

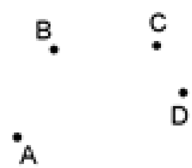


Un haz de rectas consiste en un conjuntos de rectas que pasan por el mismo punto, *a, b, c, d, e*, por ejemplo

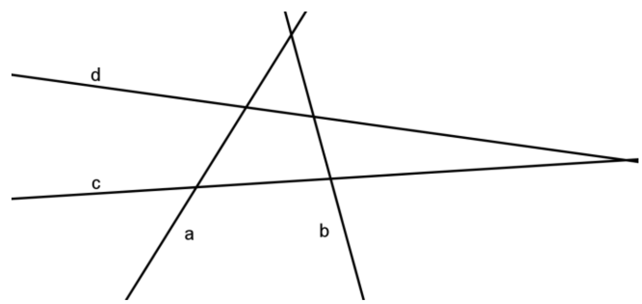
Tres rectas en el plano son concurrentes o determinan un trilátero (triángulo)

De acuerdo con el resultado que se vio en la sección 4.3, el dual de un triángulo es un trilátero, pero un trilátero es un triángulo, por lo que se dice que el triángulo es su propio dual.

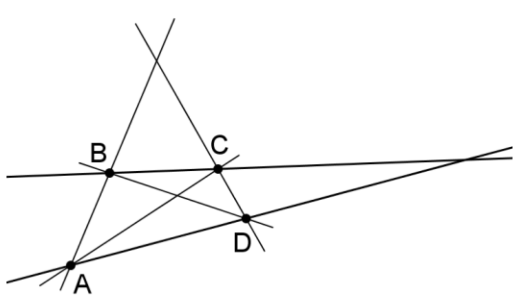
El dual de un cuadrángulo completo es un cuadrilátero completo:



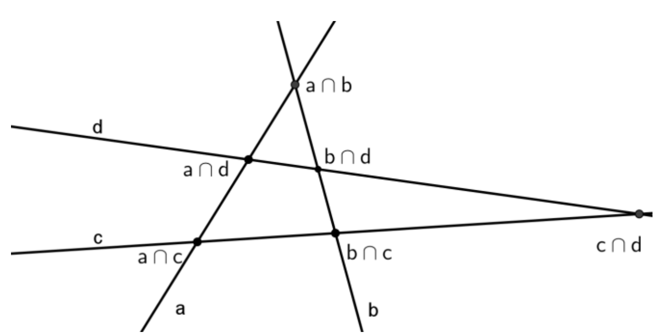
Un cuadrángulo completo está definido por 4 puntos no colineales por tercias: *A*, *B*, *C* y *D*, llamados vértices del cuadrángulo.



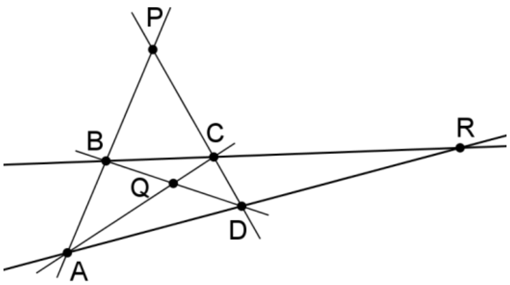
Un cuadrilátero completo está definido por 4 rectas no concurrentes por tercias: *a*, *b*, *c*, *d* llamados lados del cuadrilátero.



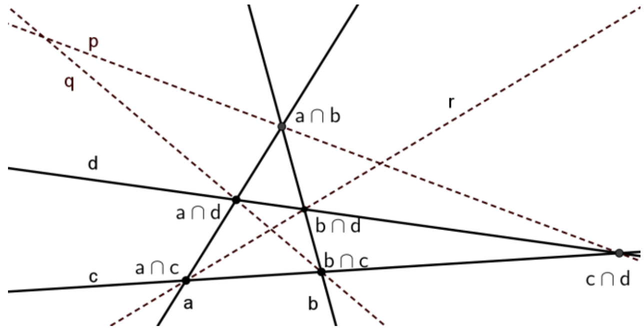
Los lados de un cuadrángulo completo son las seis rectas que unen sus vértices.



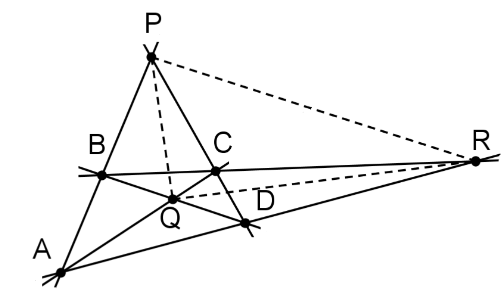
Los vértices de un cuadrilátero completo son los seis puntos de intersección de sus lados.



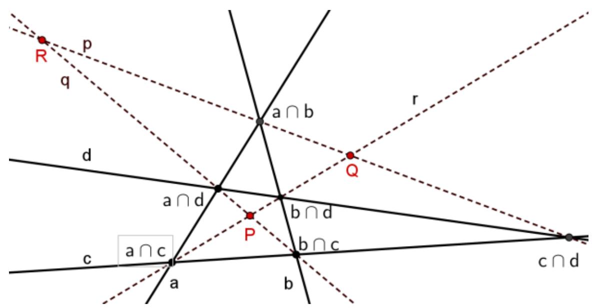
Dos lados de un cuadrángulo son opuestos si no tienen vértices en común. Los puntos diagonales son las intersecciones de lados opuestos, *P*, *Q* y *R* en la figura.



Dos vértices de un cuadrilátero son opuestos si no están sobre el mismo lado. Las rectas diagonales son las que unen vértices opuestos, *p*, *q* y *r* en la figura.



El triángulo diagonal del cuadrángulo es el que tiene a los puntos diagonales como vértices, *P*, *Q* y *R* en la figura.



El trilátero diagonal del cuadrilátero es el que tiene a las rectas diagonales como lados. Ya que el dual de un trilátero es un triángulo, también se habla del triángulo diagonal de un cuadrilátero completo, *P*, *Q* y *R* en la figura.

Tarea Examen

1) Construya un cuadrilátero completo para cada uno de los siguientes casos:
   a. Tal que uno y sólo uno de sus vértices sea un punto al infinito.
   b. Dos de sus vértices sean puntos al infinito.
   c. Tal que uno y sólo uno de los vértices de su triángulo diagonal sea un punto al infinito.
   d. Dos de los vértices de su triángulo diagonal sean puntos al infinito.
2) Muestra que los teoremas 4.4.1 y 4.5.1 son teoremas duales.
3) Los vértices de un cuadrángulo completo son los tres vértices de un triángulo y el punto de intersección de sus medianas. Construya su

triángulo diagonal. Construya un cuadrilátero completo que tenga el mismo triángulo diagonal.

4) Construya un cuadrilátero completo que tenga un triángulo diagonal dado. ¿Es única la solución?

5) Enuncie el dual del teorema de Desargues.

6) Demuestre que cada uno de los triángulos cuyos lados son tres de los cuatro lados de un cuadrilátero completo, están en perspectiva con el triángulo diagonal del cuadrilátero.

7) Encuentre un cuadrángulo completo que tenga el mismo triángulo diagonal que un cuadrilátero completo dado.