4. Trigonometría Plana

4.1. Antecedentes

Como se ha mencionado, el motor del desarrollo de la ciencia es la búsqueda de respuesta a una sucesión de preguntas y problemas. En el caso de la trigonometría, las preguntas que se hicieron en la antigüedad fueron variadas y de diferente naturaleza. Éstas, estuvieron relacionadas con la navegación, la agrimensura, la generación de mapas y la astronomía, por mencionar las más importantes. En todas ellas, el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa.

La distancia desde una embarcación a un punto determinado de la costa, o la que separa dos astros, eran inaccesibles a la medición directa; en cambio, el ángulo entre la visual dirigida al objeto con otra visual fijada de antemano era fácil de medir mediante instrumentos relativamente sencillos, por lo que estos problemas se resolvían identificando la distancia buscada con el lado de un triángulo y utilizando las magnitudes de los otros lados y/o sus ángulos, así como relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. La búsqueda de estas relaciones es lo que dio origen a la trigonometría.

Aristarco de Samos, 310 - 230 a.C. aproximadamente, en su obra *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*, calcula cuántas veces es mayor la distancia de la Tierra al Sol que la de la Tierra a la Luna y encuentra la relación entre los tamaños del Sol, la Tierra y la Luna[1]. Para encontrar la relación entre la distancia de la Tierra al Sol y de la Tierra a la Luna, propone que cuando la Luna está en cuarto creciente, es decir, cuando sólo se ve iluminada la mitad de la Luna, el ángulo entre la línea que une la Luna y el Sol y la línea que une la Luna y la Tierra es recto. Así, midió el ángulo entre las visuales a la Luna y al Sol como de 87º (un cuadrante menos $\frac{1}{30}$ de cuadrante), determinó la razón entre *TL* y *TS*, donde *L* es la posición de la Luna, *S* la del Sol y *T* la de la Tierra. La conclusión a la llegó Aristarco es que $\frac{1}{20} < \frac{TL}{TS} < \frac{1}{18}$, esto es, que la distancia del Sol a la Tierra está entre 18 y 20 veces la distancia de la Luna a la Tierra.

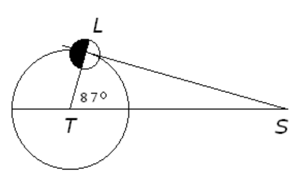


Figura 4.1

[1] Boyer, Carl. A History of Mathematics. New York: Wiley International, 1968.

En esa época, no se habían desarrollado las tablas trigonométricas, por lo que Aristarco utilizó procedimientos geométricos para llegar a la conclusión mencionada.

A la luz de las propiedades de semejanza de triángulos el resultado anterior es claro, a partir de que los tres ángulos del triángulo con vértices la Tierra, la Luna y el Sol están determinados en ese momento, y por tanto cualquier otro triángulo que tiene estos tres ángulos es semejante y la razón entre *TL* y *TS* es constante, bajo las condiciones mencionadas.

Cabe mencionar que el resultado de Aristarco, aún cuando es mejor que el que Arquímedes atribuyó a Eudoxio, está lejos de ser correcto; la razón entre las distancias mencionadas es cercana a 400. El procedimiento utilizado por Aristarco se ha considerado correcto, pero el ángulo que midió como de 87º, es realmente cercano a 89º 50’.

La utilización de procedimientos geométricos como base para cálculos que hoy consideramos trigonométricos fue habitual en la ciencia griega.

El cálculo que realizó Aristarco al respecto de la relación entre la distancia de la Tierra a la Luna y la distancia de la Tierra al Sol, queda claro que lo que determinó fue $\frac{1}{20} < sen\, 3º < \frac{1}{18}$.

Aún cuando fueron varios los astrónomos y matemáticos que trabajaron en problemas similares a los que abordó Aristarco, no se tiene referencia de ningún trabajo de sistematización de los valores de las funciones trigonométricas, o su equivalente, hasta el trabajo de Hiparco de Nicea, 180-125 a.C., aproximadamente. Las primeras tablas trigonométricas fueron tablas de cuerdas en un círculo subtendidas por ángulos centrales. En la actualidad se utiliza la función seno (el seno de un ángulo y la longitud de la cuerda que subtiende el ángulo en un círculo están relacionados cercanamente).

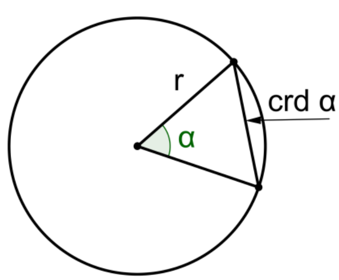


Figura 4.2

Teón de Alejandría en su comentario sobre el texto *Tabla de cuerdas inscritas en un círculo* del *Almagesto* de Ptolomeo, refiere un tratado en doce libros sobre las cuerdas de un círculo, escrito por Hiparco de Nicea. Esta obra se perdió antes de la época de Ptolomeo, y el propio Ptolomeo le da crédito, tanto por su primera tabla de cuerdas como por las observaciones astronómicas que realizó.

Hiparco, siguiendo la tradición babilónica, dividió el ángulo central del círculo en 360 partes iguales, de la misma manera en que se hace hoy en día con los grados. En la tabla calculada por Hiparco se refieren los ángulos múltiplos de 7.5º entre 0º y 90º. No se tiene certeza sobre el tamaño del radio del círculo que utilizó y se desconoce el método que aplicó. Teón refiere además otro tratado sobre cuerdas en un círculo, escrito en seis libros por Menelao de Alejandría, quien realizó importantes contribuciones a la trigonometría y a la geometría esférica las cuales se presume utilizó para la resolución de problemas de su trabajo astronómico [2].

Las tablas de cuerdas permitían a los astrónomos emplear métodos de cálculo para determinar por anticipado la posición y el movimiento de los cuerpos celestes.

Fue posteriormente Ptolomeo quien construyó las tablas de cuerdas más completas de la antigüedad, con valores angulares desde medio grado hasta 180 grados, en intervalos de medio grado. Ptolomeo utilizó un círculo de radio 60 para construir estas tablas. La ventaja de utilizar un círculo de radio grande es que se pueden evitar las fracciones. En la actualidad se utiliza un círculo de radio unitario para definir las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, no sólo para los ángulos agudos. Por supuesto que usando un círculo unitario no se evitan las fracciones, pero en la actualidad es fácil trabajar con las fracciones decimales.

4.2. Las cuerdas de Ptolomeo

Se puede establecer la relación entre el valor del seno de un ángulo y el de la cuerda que utilizó Ptolomeo en la antigüedad. En primera instancia se establecerá la relación en un círculo unitario.

Sea α un ángulo central en el círculo unitario. Sea *QR* la cuerda que abarca. Se traza *OP* bisectriz del ángulo α, luego, $\angle POQ = (\frac{\alpha}{2})$. Por ser isósceles el triángulo,

OP es mediatriz (ejercicio 35, capítulo 1). Sea *Q'* la intersección de *OP* con *QR*. Luego, *Q'* es punto medio de *QR* y es la proyección de *Q* sobre *OP*. Por tanto, $QQ' = \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})$. Se tiene entonces que:

$$\operatorname{crd} \alpha = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

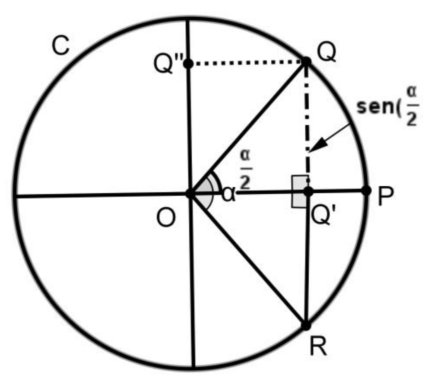


Figura 4.3

Para establecer la relación entre el valor de la cuerda subtendida por un ángulo central en un círculo de radio 60, con el valor de la función seno, hay que

[2] Boyer, Carl. A History of Mathematics. New York: Wiley International, 1968.

multiplicar el lado derecho de la igualdad por 60. Las figuras en un círculo de radio 60, son semejantes a las trazadas en el círculo de radio unitario, con constante de proporcionalidad 60. Por tanto:

$$\text{crd } \alpha = 120 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \text{ o bien } \frac{crd\ \alpha}{120} = sen\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ptolomeo calculó inicialmente las cuerdas de los ángulos de 36º, 60º y 72º utilizando la longitud de los lados de un hexágono regular, un pentágono regular y un decágono regular[3], por lo que antes de entrar a su trabajo veremos algunas propiedades de estos polígonos.

Hexágono

Teorema 4.1. El lado de un hexágono regular es igual al radio del círculo circunscrito.

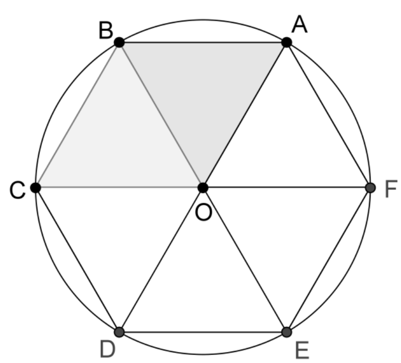


Figura 4.3

Sea *ABCDEF* un hexágono regular, por tanto *AB* = *BC* = *CD* = *DE* = *EF* = *FA* y sus ángulos interiores son iguales. Más aún, el hexágono regular es inscriptible (ejercicio 90, capítulo 1).

Sea *O* el centro del círculo que pasa por sus vértices y tracemos los radios a los vértices del triángulo y consideremos los triángulos formados. En la figura se han sombreado dos de ellos: Δ *OAB* y Δ *OBC.* Se tiene entonces que: Δ *OAB* ≅ Δ *OBC*,

ya que, *OA* = *OB* y *OB* = *OC*, por ser radios y *AB* = *BC*, por hipótesis.

De manera análoga se puede establecer que cualquiera de los triángulos con un vértice en *O,* el centro del círculo, y cuyos lados son dos radios y un lado del hexágono es congruente e isósceles. Por tanto, los ángulos en el vértice *O* de estos triángulos, son cada uno igual a 60°, son iguales y suman 360°. Por otro lado, ya que los triángulos son isósceles, los ángulos adyacentes a los lados del hexágono son iguales y suman 120°, por tanto cada uno de ellos es igual a 60° y los triángulos son equiláteros, como queríamos demostrar.

Corolario 1: Los ángulos interiores de un hexágono regular son de 120°.

Corolario 2: Dado un círculo con radio *r*, puede construirse un hexágono regular seleccionando un punto *A* cualquiera sobre el círculo y trazando un

[3] Kline, Morris. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Vol. 1. New York: Oxford University Press, 1972.

diámetro que pasa por A, sea D el otro extremo del diámetro. Con centro en A y radio AO se traza un círculo que corta el círculo original en B y F y con centro en D y radio DO se traza un círculo que corta el círculo original en C y E. El hexágono $ABCDEF$ es el buscado.

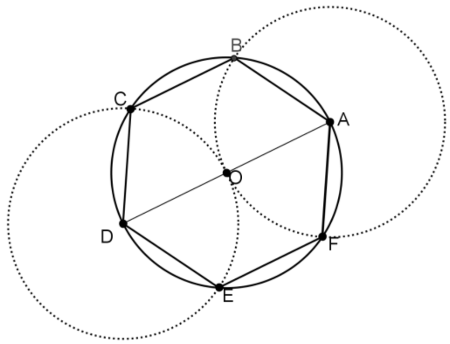


Figura 4.4

Ahora se verán algunas propiedades del pentágono, el hexágono y el decágono que están relacionadas con la razón áurea. En primera instancia veremos la definición y algunas propiedades de la razón áurea o número áureo.

Razón áurea

La definición 3 del Libro Sexto de los Elementos de Euclides propone:

"Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor".

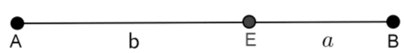


Figura 4.5

Esto se puede expresar como $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$ *donde* $a < b$.

Definición 4.1 Dadas dos cantidades a y b tal que $a < b$, *se dice que están en la proporción áurea si* $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} = \phi$. *El número* ϕ *es citado de muchas formas:*

el número áureo, dorado o de oro, razón dorada o áurea, media áurea, proporción áurea o divina proporción, entre ellas.

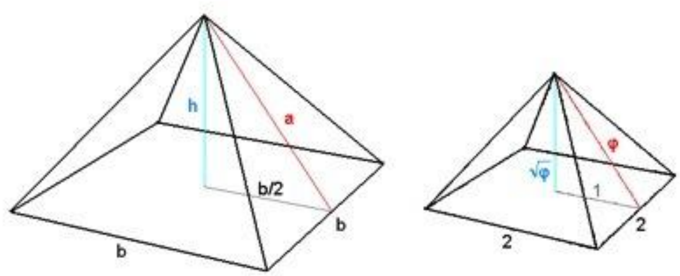
De la definición de la proporción áurea se tiene que,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{b}{a}$$

Ya que $\phi = \frac{b}{a}$, se tiene que $\phi = \frac{1}{\phi} + 1 \Longrightarrow \phi - 1 = \frac{1}{\phi} \Longrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0$, resolviendo la ecuación cuadrática se tiene que $\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Tomamos el valor positivo de ϕ y es al que llamamos el número de oro y decimos que $\frac{b}{a}$ están en la razón áurea. Además, se tiene que $\phi^2 = \phi + 1$.

Aún cuando varios autores relacionan al número áureo con las dimensiones de estelas babilónicas, de algunos edificios como el Partenón y la Gran pirámide de Giza (Keops) así como con varias obras de arte, en realidad en muchos de los casos no se tiene certeza sobre la aplicación de esta proporción fue un acto consciente o meramente intuición.

El primero en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides en los Elementos, cuya definición ya se ha visto.



El número áureo aparece con frecuencia en la naturaleza y está ligado con la sucesión de Fibonacci, ya que $\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$, donde F_n es el n-ésimo término de la sucesión.

Pentágono y razón áurea

Teorema 4.2 La diagonal y el lado de un pentágono regular están en la razón áurea.

Sea *ABCDE* un pentágono regular.

Ya que el pentágono es regular todos sus lados son iguales. Llamemos *x* a su lado.

Asimismo, todos sus ángulos interiores son iguales, por tanto cada uno de los ángulos interiores es igual a 108°.

Sea *d* una de las diagonales. Demostraremos que todas las diagonales del pentágono son iguales. Consideremos los triángulos *AED* y *EDC*, cada uno de ellos es isósceles con dos lados iguales a *x* y de 108° el ángulo comprendido entre ellos.

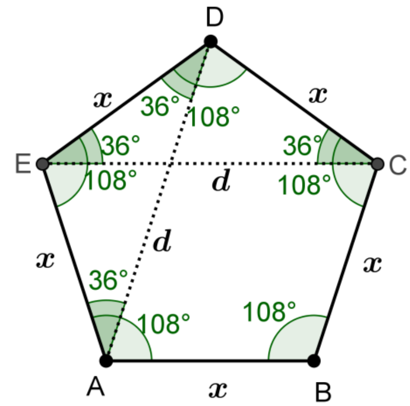


Figura 4.6

Por tanto, los triángulos son congruentes y su tercer lado, que en cada triángulo es una diagonal, es igual. De igual manera se puede demostrar que los triángulos formados por dos lados del pentágono y una diagonal son todos congruentes. Además ya que todos estos triángulos son isósceles, los otros dos ángulos son de 36° cada uno.

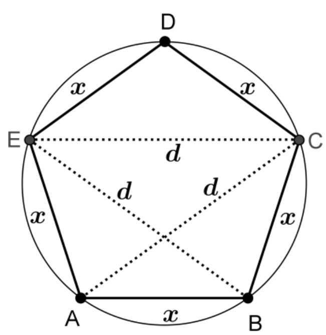


Figura 4.7

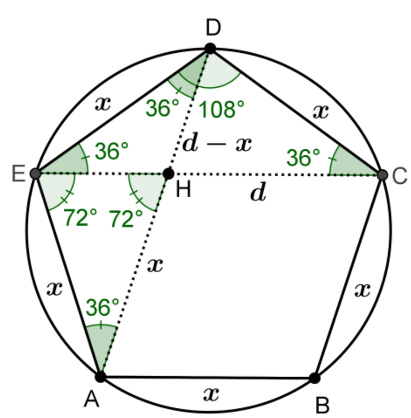
Ahora bien, ya que el pentágono es regular, es inscriptible, consideremos el cuadrilátero *ABCE*. Es un cuadrilátero inscriptible, por tanto aplicando el teorema de Ptolomeo se tiene que

$$x^2 + xd = d^2 \Longrightarrow d^2 - xd - x^2 = 0 \Longrightarrow \frac{d^2}{x^2} - \frac{d}{x} - 1 = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se tiene que:

$$\frac{d}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ahora bien, ya se demostró el teorema, pero analizando la figura se tiene que el Δ*AED* es un triángulo con ángulos 108°, 36° y 36° y tal que sus lados *d* y *x* están en la razón áurea. Decimos entonces que es un triángulo áureo.



Más aún, si consideramos el punto *H* la intersección de las dos diagonales, se tiene que Δ*AEH* tiene un ángulo igual a 108°- 36° = 72° y tiene otro ángulo igual a 36°; por tanto su otro ángulo es de 72°, es isósceles y $AH = x$.

Figura 4.8

Además, el ΔAEH también tiene sus ángulos de 108°, 36° y 36°.

Por tanto, $EH = d - x$ y el triángulo es semejante al ΔAED, ya que sus ángulos son iguales, de donde sus lados también están en la razón áurea y se tiene que $\frac{x}{d-x} = \emptyset$.

Volviendo al ΔAEH, por el resultado anterior sus lados x y d-x también están en la razón áurea.

Corolario 1: Los lados de cualquier triángulo cuyos ángulos son de 108º, 36º y 36º están en la razón áurea.

Corolario 2: Los lados de cualquier triángulo cuyos ángulos son de 36º, 72º y 72º están en la razón áurea.

Definición 4.2 Un triángulo se llama áureo mayor, si sus ángulos son de 108º, 36º y 36º.

Definición 4.3 Un triángulo se llama áureo menor, si sus ángulos son de 36º, 72º y 72º.

Pentágono, hexágono, decágono y la razón áurea

El siguiente teorema que se verá es equivalente a la proposición 9 del libro XIII de Euclides: "*Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono".*

Esta proposición junto con la proposición 10 del mismo libro, que veremos en el Teorema 4.4, nos indican cómo dado un círculo se pueden construir el lado del pentágono y el decágono inscrito en el mismo. Posteriormente podremos calcular las cuerdas de los ángulos de 36º, 60º y 72º.

Teorema 4.3 El lado de un hexágono y de un decágono inscritos en el mismo círculo están en la razón áurea.

Sea $\mathscr{C}$ un círculo con centro en *E* y sean *BC* lado del decágono regular inscrito y *CL* lado del hexágono regular inscrito. Sobre la recta *BC* se traza el punto *D* tal que *CD* = *CL.*

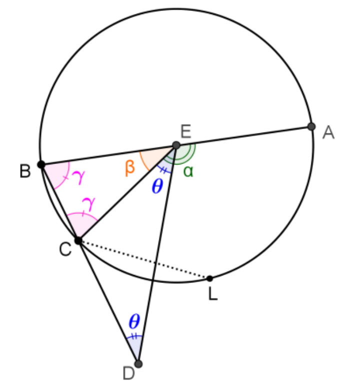


Figura 4.9

Por otro lado, ya que *AB* es diámetro y el arco *BC* es el subtendido por el lado del decágono, se tiene que,

arco ACB = 5 *arco CB* $\Longrightarrow$ *arco AC* = 4*arco CB*

de donde $\measuredangle AEC = 4\measuredangle CEB$.

Si $\measuredangle AEC = \alpha$, $\measuredangle CEB = \beta$, $\measuredangle EBC = \measuredangle ECB = \gamma$.

Se tiene que $\alpha = 4\beta$. Además, $\alpha = 2\gamma$ por ser ángulo exterior del Δ*EBC* no adyacente a γ.

Pero además, el Δ*ECD* es isósceles por tanto $\measuredangle CED = \measuredangle CDE = \theta$. Pero γ es ángulo exterior del Δ*ECD* no adyacente a θ, por tanto $\gamma = 2\theta$, de donde $\alpha = 4\theta$ y $\theta = \beta$. Consideremos ahora los triángulos Δ*BEC* y Δ*BED*, tienen un ángulo común γ, tienen otro ángulo tal que $\theta = \beta$, por tanto su tercer ángulo γ en *BEC* y $\beta + \theta$ en *BED*. Por tanto son semejantes y

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BC}\ .$$

Pero *BD* = *BE* +*BC*, *BE* es el lado del hexágono y *BE* el del decágono. Por tanto queda demostrado el teorema.

Teorema 4.4 Dado un pentágono regular inscrito en un círculo, el cuadrado de su lado es igual a la suma de los cuadrados de los lados de un hexágono y un decágono inscritos en el mismo círculo.

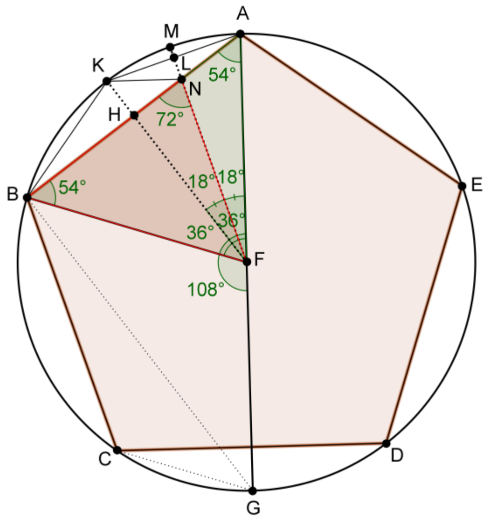


Figura 4.10

Sea *ABCDE* un pentágono regular inscrito en un círculo. Sea *F* el centro del círculo circunscrito. Se traza *AF* y sea *G* la intersección de este diámetro con el círculo.

Sea *FH* la perpendicular al lado *AB* del pentágono por *F* y *K* la intersección de *FH* con el círculo.

Trazamos los segmentos *KA* y *KB*. Sea *FL* perpendicular a *AK*, sean *N* y *M* las intersecciones de *FL* con *AB* y el arco *AK* respectivamente. Se demostrará que Δ*ABF* ≈Δ*BFA.*

En primera instancia, se tiene que $Arco\ ABG = Arco\ AEC$, por ser semicircunferencias, y $Arco\ ABC = Arco\ AED$, por abarcar cada uno dos lados del pentágono, por tanto restando se tiene que $Arco\ CG = Arco\ GD$ y el $Arco\ CG = \ Arco\ GD = \frac{1}{2}\ Arco\ CD$. Por lo tanto, $\measuredangle\, BFG = 108°$, por ser central y que abarca $\frac{3}{10}$ de la circunferencia.

Además, $\measuredangle\, AFB = 72°$, por ser central y que abarca $\frac{1}{5}$ de la circunferencia, pero *FH* es perpendicular a *AB*, por tanto biseca al $\measuredangle\, AFB$, a la cuerda *AB* y al *Arco AB* y se tiene que $\measuredangle\, BFK = 36°$, $\measuredangle\, KFA = 36°$, *BH* = *HA* y $Arco\ AK = Arco\ KB = \frac{1}{2}\ Arco\ AB$ por lo que *AK* y *BK* son también lados del decágono.

Pero también se tiene que *FN* es perpendicular a *AK*, por tanto biseca al $\measuredangle\, AFK$, a la cuerda *AK* y al *Arco AK* y se tiene que $\measuredangle\, KFN = 18°$, $\measuredangle\, NFA = 36°$, *KL* = *LA* y

$Arco\ AM = Arco\ MK = \frac{1}{2}\ Arco\ AK$. Además $\measuredangle\ BAG = \frac{1}{2}\ \measuredangle BFG$, por ser inscrito que abarca la misma cuerda y por tanto $\measuredangle\ BAG = 54°$.

Por tanto, se tiene que en el ΔABF sus ángulos son de 54°, 54° y 72°, el triángulo es isósceles y los lados iguales son *AF* y *BF* que son radios del círculo. Por otro lado los ángulos del ΔABF también son de 54°, 54° y 72°. Por tanto los dos triángulos son semejantes y se tiene que:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{FB}{BN} \quad \Rightarrow \quad AB \times BN = BF^2. \quad ...(1)$$

Ahora se demostrará que $\Delta ABK \approx \Delta BFA$.

Para poder analizar adecuadamente la figura, se ha ampliado la parte de la figura 4.10 que se va a utilizar.

En primera instancia es conveniente recordar que los ángulos interiores de un decágono regular son 144°.

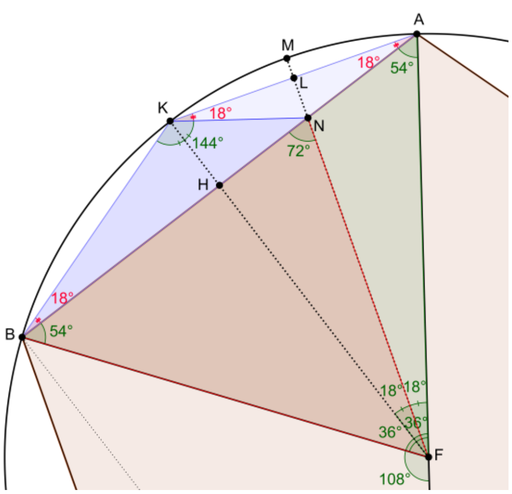


Figura 4.11

Por tanto, en el triángulo *BKA*, los otros dos ángulos son iguales a 18°, ya que el triángulo es isósceles. Además, ya que *FN* es mediatriz de *AK* (perpendicular por el punto medio), se tiene que *NK* = *NA* y el triángulo es isósceles con un ángulo de 18°, por tanto los otros dos ángulos son 18° y 144°, respectivamente y los dos triángulos son equiángulos y por tanto semejantes. De donde:

$$\frac{BA}{AK} = \frac{AK}{NA} \quad \Rightarrow \quad AB \times NA = AK^2. \quad ...(2)$$

De (1) y (2) se tiene que $AB\,(BN + NA) = AK^2 + BF^2 \Rightarrow AB^2 = AK^2 + BF^2$, con *AB* lado del pentágono, *BF* del hexágono y *AK* del decágono.

Problema 4.1 Dado un círculo de radio 60, calcular la cuerda de los ángulos de 36º, 60º y 72º.

El cálculo es el realizado por Ptolomeo.

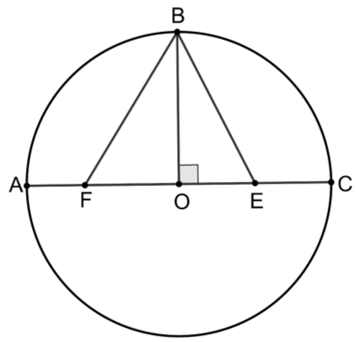


Figura 1.1

Sea un círculo con centro en *O* y radio *OC* = 60, sea *A* el otro extremo del diámetro por *C*, sea *E* el punto medio de *OC*, sea el punto *B* la intersección del círculo con la perpendicular a la recta *AC* por *O* y sea *F* tal que está en el diámetro *AC* y *EF* = *BE*.

BO es igual al lado del hexágono por el teorema 4.1. Por otro lado, $BE = \sqrt{30^2 + 60^2} = \sqrt{4{,}500} = 30\sqrt{5}$. Además $CF = FE + EC = 30\sqrt{5} + 30 = 30(\sqrt{5} + 1)$, de donde $\frac{CF}{BO} = \frac{30(\sqrt{5}+1)}{60} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$.

Se tiene entonces que, *OF* es igual al lado del decágono regular inscrito, *BF* es igual al lado del pentágono regular inscrito y *BO* es igual al lado del hexágono regular inscrito. Entonces:

$$crd\ 60^{\underline{o}} = OB = 60 \text{ (radio del círculo),}$$

$$crd\ 36^{\underline{o}} = FO = FE - OE = BE - 30 = \sqrt{(BO)^2 + (OE)^2} - 30 = \sqrt{3{,}600 + 900} - 30 =$$

$$= 37.08203932,$$

$$crd\ 72^{\underline{o}} = BF = \sqrt{(FO)^2 + (OB)^2} = \sqrt{1{,}375.07764013 + 3{,}600} = \sqrt{4{,}975.07764013} =$$

$$= 70.53423027.$$ [4]

*Problema 4.2 Dado un círculo de radio 60, calcular la cuerda del ángulo de 90*º.

[4] Ptolomeo realizó estos cálculos en sistema sexagesimal, pero para facilitar la comprensión de las ideas geométricas se utiliza la notación decimal en este texto.

Para calcular la cuerda del ángulo de 90º, utilizó un cuadrado inscrito en un círculo del mismo radio. En un cuadrado las diagonales son iguales, se bisecan y son perpendiculares; por lo que, en un cuadrado inscrito en un círculo, el punto de intersección de sus diagonales es el centro del círculo, ejemplo 1.12.1. Por tanto, se tiene un triángulo rectángulo con catetos de longitud 60 e hipotenusa igual a 84.85272727, que es la cuerda de un ángulo central de 90º, en un círculo de radio 60.

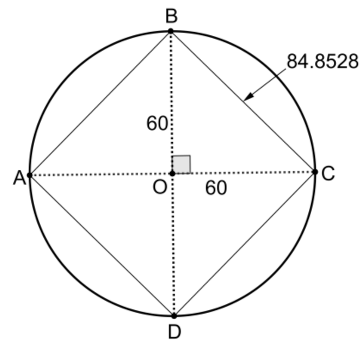


Figura 1.2

Problema 4.3 Dado un círculo de radio 60, calcular la cuerda del ángulo de 120º.

Para calcular la cuerda del ángulo de 120º, Ptolomeo utilizó un triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio 60, además del hecho de que el cuadrado de su lado es igual al triple del cuadrado del radio del círculo, que es la proposición 12 del libro XIII de los Elementos de Euclides.

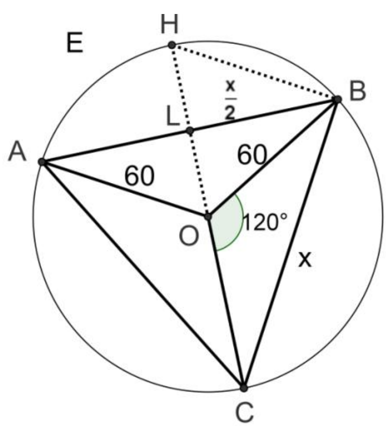


Figura 1.3

Primero se demostrará esta última proposición. Sea *ABC* un triángulo equilátero. Sea *E* el circuncírculo del triángulo. Sea *O* el centro de *E*. Por ser equilátero el triángulo *ABC*, el radio *CO* es la mediatriz de *AB*, ya que tanto *C* como *O* están en la misma. Sea *L* la intersección del diámetro por *C* con la recta *AB* y *H* la intersección de este diámetro con el círculo *E*. Por ser *CL* mediatriz de *AB*, *L* es punto medio *AB* y si *x* es la magnitud del lado del triángulo, entonces la longitud de *LB* es $\frac{x}{2}$.

Además, *CL* es bisectriz del $\angle BCA$,

Se trazan los radios por *A* y *B*, entonces, $\measuredangle COB = \measuredangle BOA = \measuredangle AOC = 120º$. Se traza la recta *BH*. Se tiene entonces que, $\measuredangle HBA = \measuredangle HCA = 30º$, por ser inscritos, que abarcan el mismo arco y ser *CH* bisectriz del $\measuredangle BCA$. Además, *BO* es mediatriz del segmento *AC* y por tanto bisectriz del $\measuredangle ABC$.

Por tanto, $\measuredangle HBA = \measuredangle ABO = 30°$ y ya que *HL* es perpendicular a *AB*, se tiene que $\Delta HBL \cong \Delta OBL$, por tener sus tres ángulos iguales y un lado común. Por tanto, $HB = OB = r$ y $HL = LO = \frac{r}{2}$. Si se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo *OBL* o al triángulo *HBL*, se tiene que $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{r}{2})^2 = r^2$, luego $\frac{x^2}{4} + \frac{r^2}{4} = r^2$, de donde $x^2 = 3r^2$. Por tanto el valor de la cuerda del ángulo central de 120º, en el círculo de radio 60, es igual a $\sqrt{3\,(60)^2} = 103.92304845$.

Problema 4.4 Dado un círculo de radio 60, calcular las cuerdas de los ángulos de 144º, 108º.

Conociendo los valores de las cuerdas para los ángulos ya encontrados, Ptolomeo encontró las longitudes de las cuerdas de otros ángulos usando que el ángulo inscrito en un círculo que abarca un diámetro es de 90°.

Sea *C* un círculo de radio 60, *AB* un diámetro y $\angle AOA' = \alpha = 36º$. Se traza la cuerda *A'B*, entonces $\angle A'OB = \beta = 144º$. El $\angle AA'B = 90º$, ya que abarca un diámetro y por tanto,

$$(AA')^2 + (A'B)^2 = (AB)^2 = (120)^2 = 14{,}400,$$

$$(A'B)^2 = 14{,}400 - (37.08203932)^2,$$

$$(A'B)^2 = 114.12694445.$$

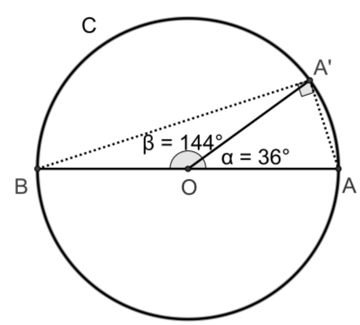


Figura 1.4

En la misma forma calculó el valor para la cuerda de 108º, a partir del valor de la cuerda de 72º.

La relación establecida para realizar estos cálculos es equivalente a la igualdad (sen α)^2 + (cos α)^2 = 1. De acuerdo con lo realizado por Ptolomeo, si *AA'* es la cuerda subtendida por un ángulo α menor a 180º y *A'B* la cuerda subtendida por el ángulo suplementario, 180º - α,

$$(AA')^2 + (A'B)^2 = (120)^2.$$

De la relación crd $\alpha = 120\,\mathrm{sen}(\frac{\alpha}{2})$, se tiene,

$$[120\,sen(\tfrac{\alpha}{2})]^2 + [120\,sen(\tfrac{180° - \alpha}{2})]^2 = (120)^2,$$

de donde,

$$[sen(\frac{\alpha}{2})]^2 + [sen(90° - \frac{\alpha}{2})]^2 = 1,$$

pero, $\frac{\alpha}{2}$ es un ángulo menor que 90º, por tanto $sen(90° - \frac{\alpha}{2}) = cos\frac{\alpha}{2}$, por tanto,

$$[sen(\frac{\alpha}{2})]^2 + [cos(\frac{\alpha}{2})]^2 = 1.$$

En la tabla siguiente se resumen los resultados hasta ahora revisados, en ella se presentan los valores calculados por Ptolomeo[5] para las cuerdas subtendidas por un ángulo central α, y se comparan con el valor del seno del ángulo $\frac{\alpha}{2}$. Se puede observar la precisión con la que fueron calculados estos valores.

Ángulo α	**Cuerda calculada por Ptolomeo**[6]			**Cuerda en notación decimal**	$\frac{Crd\ \alpha}{120}$	**Ángulo** $\frac{\alpha}{2}$	**sen** $\frac{\alpha}{2}$
36º	37	4′	55″	37.08194445	0.30901620	**18º**	0.30901699
60º	60			60	0.5	**30º**	0.5
72º	70	32′	3″	70.53416666	0.58778472	**36º**	0.58778525
90º	84	51′	10″	84.85277777	0.70710648	**45º**	0.70710678
108º	97	4′	56″	97.08222222	0.80901851	**54º**	0.80901699
120º	103	55′	23″	103.92305554	0.86602546	**60º**	0.86602540
144º	114	7′	37″	114.12694443	0.95105787	**72º**	0.95105651

Tabla 1.1

Para deducir el valor de las cuerdas de otros ángulos, encontró una forma de calcular la cuerda subtendida por la diferencia de dos ángulos, utilizando como lema el ahora conocido como Teorema de Ptolomeo, que se vió en la sección anterior.

[5] http://cerebro.xu.edu/math/math147/02f/ptolomy/ptolomytext.html.

[6] Los números están en el sistema sexagesimal que se utilizaba en la época de Ptolomeo. El número que aparece en el primer renglón denota a $37+ 4/60 + 55/(60)^2$ en el sistema decimal.

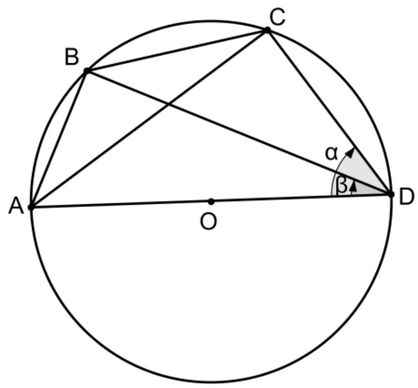


Figura 1.5

Ptolomeo considera un cuadrilátero cíclico *ABCD*, en el que uno de sus lados es un diámetro, *AD* en el caso de la figura 1.131. Dados los ángulos α y β, inscritos en el círculo, que subtienden las cuerdas *AC* y *AB* respectivamente, se requiere calcular el valor de la cuerda *BC*, subtendida por el ángulo (α - β).

Los triángulos *ACD* y *ABD* son rectángulos, por tanto:

$$CD = \sqrt{(AD)^2 - (AC)^2},$$

$$BD = \sqrt{(AD)^2 - (AB)^2}.$$

Por el teorema de Ptolomeo,

$$(AD)\,(BC) + (AB)\,(CD) = (AC)\,(BD),$$

por lo tanto,

$$BC = \frac{(AC)(BD) - (AB)(CD)}{AD} = \frac{(AC)\sqrt{(AD)^2 - (AB)^2} - (AB)\sqrt{(AD)^2 - (AC)^2}}{AD}$$

pero, *AD* = 120, por ser diámetro del círculo,

$$BC = \frac{(AC)\sqrt{(120)^2 - (AB)^2} - (AB)\sqrt{(120)^2 - (AC)^2}}{120}.$$

La cuerda *BC* puede calcularse a partir de las cuerdas *AB* y *AC*.

Ahora, los ángulos que se consideran son inscritos, pero su relación con los ángulos centrales es clara. El ángulo central que subtiende la cuerda *AC* es 2α, el ángulo central que subtiende la cuerda *AB* es 2β y el que subtiende la cuerda *BC* es $2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta)$.

En esta forma, Ptolomeo calculó las cuerdas de ángulos que son diferencia de ángulos, por ejemplo, de 18º = 90º - 72º, 12º = 72º - 60º. En forma análoga encontró la forma de calcular cuerdas de ángulos que son suma de ángulos.

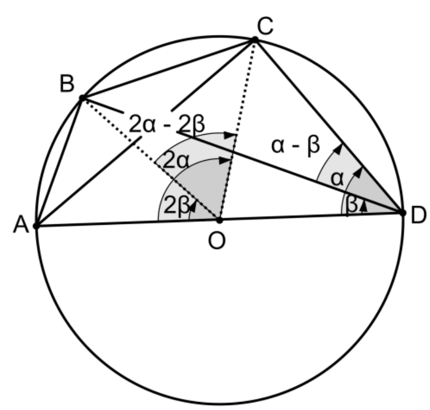


Figura 6

Para calcular la cuerda correspondiente a la suma de dos ángulos y la mitad de un ángulo, Ptolomeo utilizó métodos análogos, y con ellos, y los métodos ya vistos, podía calcular cuerdas de ángulos con intervalos de ¾ de grado. A través de la interpolación los calculó con intervalos de ½ grado.

Aproximadamente dos siglos después de la época de Ptolomeo, en India se desarrolló el concepto de seno de un ángulo como "media cuerda". Asimismo, el concepto de coseno se desarrolló como una forma de computar el seno de ángulos complementarios. Las otras funciones trigonométricas aparecieron siglos después, primero la tangente y cotangente y posteriormente la secante y cosecante. A través de traducciones árabes de los trabajos griegos e hindúes, estos conceptos penetraron en Europa. El primer trabajo europeo importante en esta materia, *De triangulis omnimodis*, fue escrito en el siglo XV por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, conocido como Regiomontano.[7]

Es interesante hacer notar que de la antigüedad al siglo XVI, la trigonometría fue desarrollada fundamentalmente por astrónomos y que fue hasta ese siglo, con el trabajo del matemático François Viète, que la trigonometría inicia su camino hacia su carácter analítico moderno, al incorporar el lenguaje algebráico a la trigonometría y finalmente con los trabajos de Newton y Euler, con la utilización de las series de potencias, la trigonometría cambia su carácter de estudio de longitudes de segmentos relacionados con un círculo, al de estudio de relaciones funcionales.

Ejercicios:

1) *Demuestre el corolario 2 del Teorema 4.1.*
2) *Construya geométricamente el número áureo. Hint: Puede utilizar un triángulo rectángulo.*
3) *Dado un segmento AB, encuentre un punto C tal que divida al segmento AB en la razón áurea.*
4) *Dado un segmento a, construya el segmento b, tal que* $\frac{a}{b} = \phi$.
5) *Demuestra los corolarios del teorema 4.2.*
6) *Se llama rectángulo áureo a aquel cuyos lados están en la razón áurea. Construye un rectángulo áureo a partir de un segmento de longitud 1.*
7) *Demuestre que*
   a. $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$.
   b. $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$.

[7] Maor, Eli. Trigonometric Delights. Princeton: Princeton University Press, 1998.

8) *Utilizando los resultados de los teoremas 4.1 a 4.4, dado un círculo de radio r, construye:*

   a. *Un pentágono inscrito en el círculo.*

   b. *Un decágono inscrito en el círculo.*

9) *Utilice un cuadrilátero inscrito en el que una de sus diagonales es un diámetro para demostrar:*

$$sen(\alpha + \beta) = (sen\ \alpha)(cos\ \beta) + (sen\ \beta)(cos\ \alpha).$$

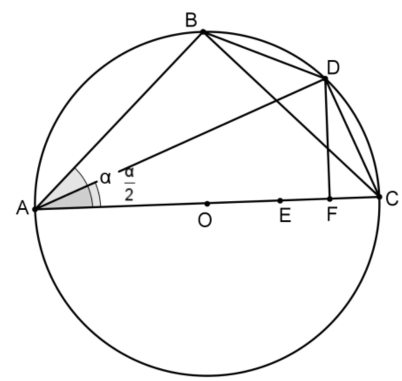
10) *Sea BC un arco en un círculo con diámetro AC y sea D un punto en el arco BC, tal que D biseca al arco BC. Dado el valor de la cuerda BC:*

   a) *Encuentre el valor de la cuerda DC.*

   b) *Demuestre que la expresión obtenida para encontrar este valor es equivalente a:*

$$sen\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha).$$

   Sugerencia: Trace por D la perpendicular a AC y trace E en AC tal que EF = FC.



11) *Utilizando los resultados de este capítulo y los valores de las cuerdas en el cuadro resumen, calcula el valor de las cuerdas de los siguientes ángulos: 66°, 48°, 24°, 18° y 6°.*

1)

Apéndice de Trigonometría

a) Seno y coseno de un ángulo positivo

Sea *C* un círculo de radio 1. Sea α un ángulo positivo. Se traza una semirrecta que forme un ángulo α con la semirrecta horizontal que está en el semiplano derecho que determina la vertical. Sea *Q* la intersección de esta semirrecta con el círculo. Se consideran las proyecciones del punto *Q* sobre las rectas horizontal y vertical. Se llama Q′ y Q′′ a estos puntos respectivamente, tal y como se indica en las figuras siguientes.

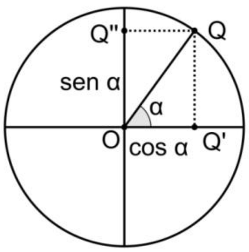


Figura A.1

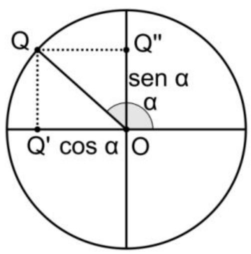


Figura A.2

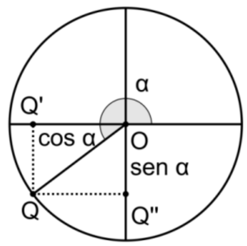


Figura A.3

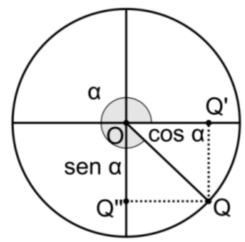


Figura A.4

Se define el sen α como la magnitud del segmento con sentido entre el centro del círculo y la proyección del punto *Q* sobre la recta vertical, *OQ″* en las figuras A.1, A.2, A.3 y A.4.

Se define el cos α como la magnitud del segmento con sentido entre el centro del círculo y la proyección del punto *Q* sobre la recta horizontal, *OQ′* en las mismas figuras.

b) Si α es un ángulo positivo, entonces se tiene:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } (\alpha + 360º);\ \text{en radianes, sen } \alpha = \text{sen } (\alpha + 2\pi),$$
$$\cos \alpha = \cos (\alpha + 360º);\ \text{en radianes, } \cos \alpha = \cos (\alpha + 2\pi),$$
$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1;\ \text{también se escribe como } \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

c) Si α es un ángulo positivo, se tiene entonces que:

$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{ sen } \alpha \ \text{ y } \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

d) Si α y β son dos ángulos positivos, tales que $\alpha + \beta = 180º$ $(\alpha + \beta = \pi)$, entonces:

$$\text{sen } (\beta) = \text{sen } (\alpha),\ \text{ y } \cos(\beta) = -\cos(\alpha).$$

e) Si α es un ángulo positivo, tal que $0° < \alpha < 90º$:

- *sen (180º + α) = -sen (α),*
- *cos (180º + α)= -cos (α),*
- *sen (360º - α) = sen (-α)= -sen (α),*
- *cos (360º - α) = cos (-α)= cos (α).*

f) Las gráficas de sen y cos:

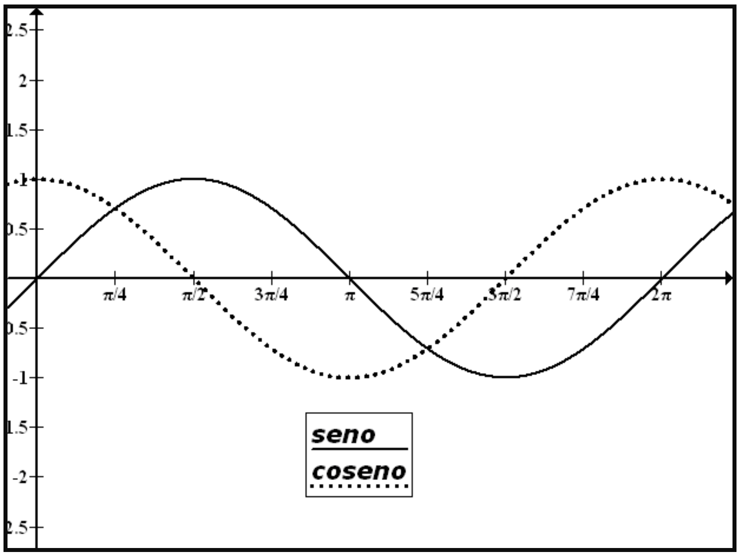


Figura A.5

g) Para construir la gráfica del seno en el intervalo [-2π, 0], basta recordar que sen (-α) = - sen α; esto es, la gráfica del seno en este intervalo es simétrica, con respecto al origen, a la gráfica en el intervalo [0, 2π].

En la figura A.6, aparece la gráfica del seno para el intervalo [-2π, 2π].

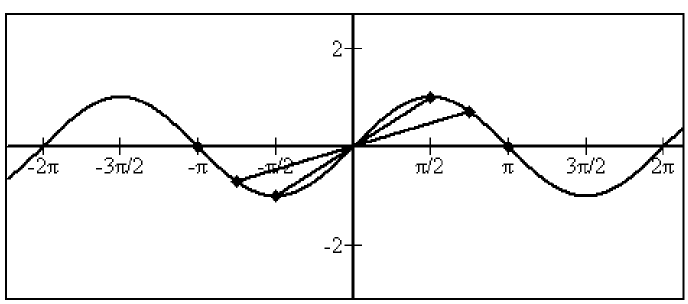


Figura A.6

Para construir la gráfica del seno en el intervalo [-2π, 0], basta recordar ahora, que cos (-α) = cos α; esto es, la gráfica del coseno en este intervalo es simétrica, con respecto al eje X, a la gráfica en el intervalo [0, 2π].

En la figura A.7, aparece la gráfica del coseno para el intervalo [-2π, 2π].

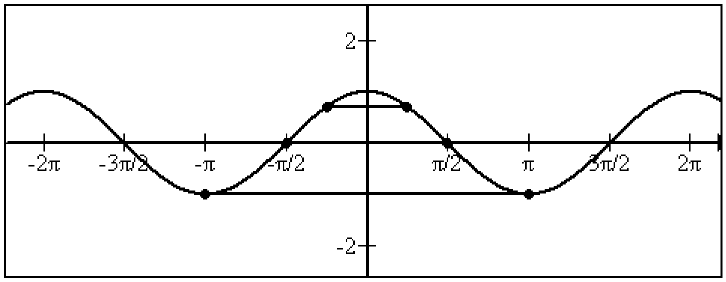


Figura A.7

En la figura A.8, se tienen las gráficas de las dos funciones, seno y coseno, para el intervalo [-2π, 2π].

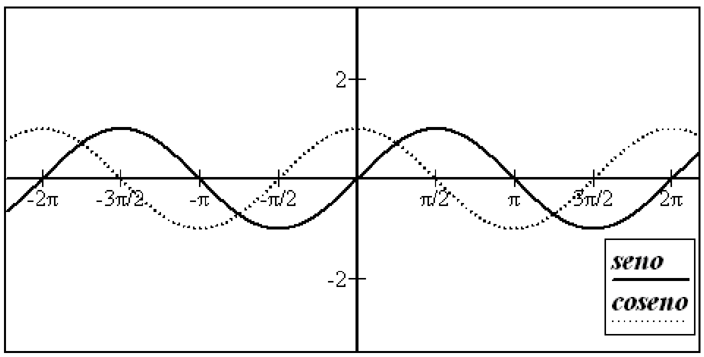


Figura A.8

h) Teorema A.1 (Ley de los Senos)

Si α, β y γ *son los ángulos interiores de un triángulo ABC, se tiene entonces que:*

$$\frac{BC}{sen\,\alpha} = \frac{AC}{sen\,\beta} = \frac{AB}{sen\,\gamma}.$$

Demostración:

Dado el ΔABC, se analizará primero el caso en que todos los ángulos del triángulo sean agudos. Se traza una de las alturas, *CD* en el caso de la figura A.9. Se tiene que ΔACD y ΔBCD son rectángulos y por tanto:

$$sen\,\alpha = \frac{CD}{AC},\; sen\,\beta = \frac{CD}{BC},$$

de donde, $CD = AC$ sen α; $CD = BC$ sen β,

y por tanto, $\dfrac{BC}{sen\,\alpha} = \dfrac{AC}{sen\,\beta}$.

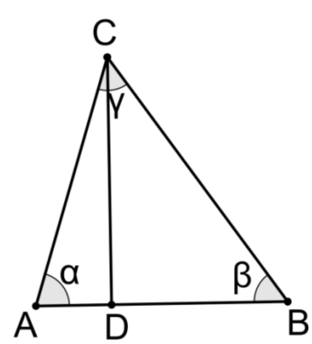


Figura A.9

Para demostrar la igualdad $\frac{AC}{sen\,\beta} = \frac{AB}{sen\,\gamma}$, se traza la altura por el vértice A y se procede de manera análoga.

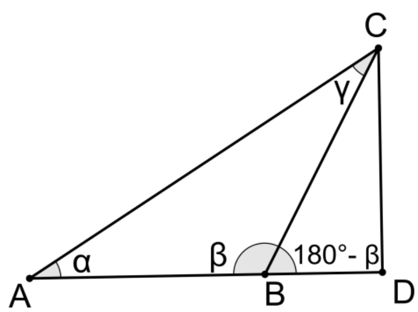


Figura A.10

En el caso en que alguno de los ángulos del ΔABC sea obtuso, sin perder generalidad se puede suponer que es β. Se traza la altura *CD*, figura A.10. Se tiene que ΔACD y ΔBCD son rectángulos y por tanto:

$$sen\,\alpha = \frac{CD}{AC};\ sen\,(180° - \beta) = \frac{CD}{BC},$$

de donde,

$$CD = AC \text{ sen } \alpha\,;\ CD = BC \text{ sen } (180º\text{- } \beta).$$

Pero, sen β = sen (180º - β), y por tanto $\frac{BC}{sen\,\alpha} = \frac{AC}{sen\,\beta}$.

Para demostrar la igualdad $\frac{AC}{sen\,\beta} = \frac{AB}{sen\,\gamma}$, se procede como en el caso anterior.

i)Teorema A.2 (Ley de los Cosenos)

Si α, β y γ *son los ángulos interiores de un triángulo ABC, entonces se satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos\alpha,$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2(AB)(BC)\cos\beta,$$

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2(AC)(BC)\cos\gamma.$$

Demostración:

Se analizará primero el caso de que todos los ángulos del ΔABC sean agudos. De acuerdo con los resultados del problema 63 en todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. Se traza una de las alturas, *CD* en el caso de la figura A.11.

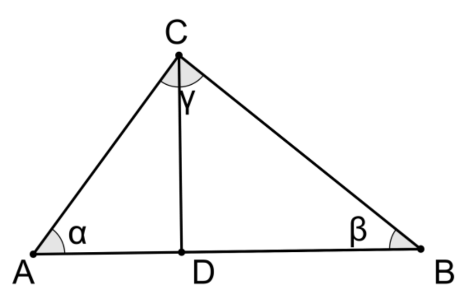


Figura A.11

Se tiene entonces que:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)\,(AD),$$

ya que, AD es la proyección de AC sobre AB.

El ΔACD es rectángulo y por tanto:

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AC},$$

de donde,

$$AD = AC \cos\alpha\,;$$

por tanto,

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)\,(AC)\cos\alpha, \text{ como se quería demostrar.}$$

La demostración de las otras dos igualdades, para este caso, se puede obtener renombrando los vértices y los ángulos.

En el caso de que alguno de los ángulos del ΔABC sea obtuso, de acuerdo con los resultados del problema 77, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Se puede suponer que α es el ángulo obtuso. Se traza la altura por el punto C. Sea D el pie de la altura (figura A.12).

Se tiene entonces que:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 + 2(AB)\,(AD),$$

ya que, AD es la proyección de AC sobre AB.

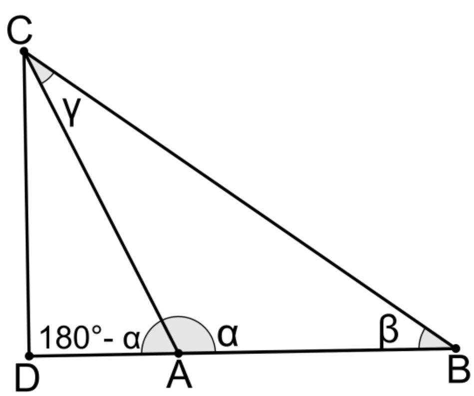


Figura A.12

El ΔACD es rectángulo y por tanto:

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{AD}{AC},$$

de donde,

$$AD = AC \cos(180° - \alpha).$$

Pero se tiene que,

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Luego,

$$AD = -\,AC \cos(\alpha).$$

Por tanto:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 + 2(AB)\,(-AC\cos\alpha),$$

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)\,(AC)\cos\alpha,$$

como se quería demostrar.

j) En los casos siguientes, supóngase que se tiene un ΔABC, con ángulos interiores α, β y γ, opuestos a los lados BC, AC y AB, respectivamente, como lo indica la figura A.13. Aún cuando la figura no lo indica, alguno de los ángulos puede ser obtuso.

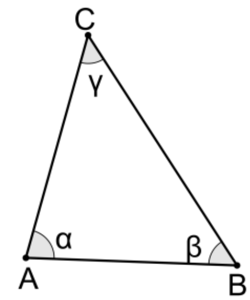


Figura A.13

i) Sean AC = 5, α = 70º y β =30º. Encuentre la magnitud del otro ángulo y los otros dos lados.

Ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulos es igual a 180º, γ = (180º-(30º+70º)) = 80º.

Por la ley de los senos:

$$\frac{5}{sen\,30°} = \frac{BC}{sen\,70°} = \frac{AB}{sen\,80°}\ ,$$

$BC = \dfrac{5\,sen\,70°}{sen\,30°}$, $AB = \dfrac{5\,sen\,80°}{sen\,30°}$,

$BC = \dfrac{5\,(0.939692)}{0.5}$, $AB = \dfrac{5\,(0.984807)}{0.5}$,

BC = 9.39692. AB = 9.84807.

ii) Sean AC = 5, AB = 7 y α = 30º. Encuentre la magnitud del otro lado y los otros dos ángulos.

Por la ley de los cosenos:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos\alpha$,

$(BC)^2 = (7)^2 + (5)^2 - 2(7)(5)(0.866025)$,

$(BC)^2$ = 13.37825,

BC = 3.657629.

iii)Sean AC = 15, AB = 23 y β = 30º. Encuentre la magnitud del otro lado y los otros dos ángulos.

En este caso no es aplicable la ley de los cosenos, ya que el ángulo que se conoce no es el opuesto al lado que se busca. Si se aplica la ley de los senos se tiene:

$$\frac{15}{sen\,30°} = \frac{BC}{sen\,\alpha} = \frac{23}{sen\,\gamma}\ ,$$

luego,

$$15 \text{ sen } \gamma = 23 \text{ (sen } 30º),$$

de donde, sen γ = 0.76667.

Entonces, γ =50º, pero ya que sen (180º-50º) = sen (50º), el valor γ_2 =130º, satisface también la ecuación. En el caso que γ =50º, se tiene que α = 100º y en el caso de que γ_2 =130º, se tiene α_2 = 20º. Ahora, de la igualdad,

$$BC = \frac{23 \, sen \, \alpha}{sen \, \gamma},$$

se obtienen dos valores para la magnitud de *BC,*

$$BC = 29.5682 \text{ y } (BC)^2 = 10.2689.$$

iv) Sean *P* y *Q* dos objetos inaccesibles, pero visibles desde *A* y *B*. Calcule la distancia entre *P* y *Q*, si se tiene α = 44.58º, β = 38.37º, γ = 43.72º, δ = 42.92º y *AB* = 452, figura 1.123.

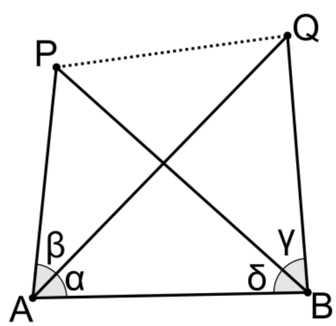


Figura 1.7

Se considera el triángulo *PAB*, dos de sus ángulos son $\alpha+\beta$ y δ, por tanto, $\angle APB$ =54.13º. Por la Ley de los Senos,

$$\frac{PA}{sen\,(42.92°)} = \frac{PB}{sen\,(82.95°)} = \frac{452}{sen\,(54.13°)},$$

por tanto,

$$PA = \frac{452\ (sen\ 42.92°)}{sen\ (54.13°)} = \frac{452\ (0.680976)}{0.810348} =$$

$$= 379.84$$

$$PB = \frac{452\ (sen\ 82.95°)}{sen\ (54.13°)} = \frac{452\ (0.992439)}{0.810348} =$$

$$= 553.57$$

Se considera el triángulo *QAB*, dos de sus ángulos son α y $\delta+\gamma$, por tanto, $\angle AQB$ =48.78º. Se aplica nuevamente la Ley de los Senos y se obtiene *QA* = 599.88 y *QB* = 421.79.

La longitud *PQ* se puede calcular aplicando la Ley de los Cosenos ya sea al ΔPQA o al ΔPQB, de los cuales se conocen dos de sus lados y el ángulo opuesto al lado que no se conoce. Si se calcula en el ΔPQA,

$$(PQ)^2 = (PA)^2 + (QA)^2 - 2(PA)(QA) \cos \beta$$

$$(PQ)^2 = (379.84)^2 + (599.88)^2 - 2(379.84)(599.88)(0.784018)$$

$$(PQ)^2 = 144{,}278.43 + 359{,}856.01 - 357{,}290.20 = 146{,}844.24$$

PQ = 383.20.

v) Calcule el área de un triángulo en función de sus lados y sus ángulos.

Se realizará el cálculo para el caso de un triángulo acutángulo y los otros casos, rectángulo y obtusángulo, se dejan como ejercicio.

Sea ΔABC un triángulo acutángulo. Para calcular el área del triángulo se traza por uno de sus vértices una altura, C y h_1, en el caso de la figura 1.124. Luego, si K es el área del triángulo:

$$K = \frac{(AB)\,h_1}{2}.$$

Pero, $h_1 = (AC)$ sen α, entonces,

$$K = \frac{(AB)(AC)sen\ \alpha}{2}.$$

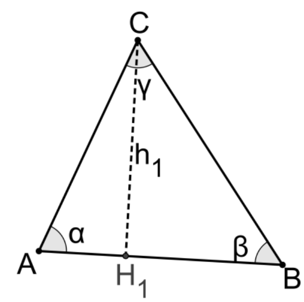


Figura 1.8

De manera análoga se puede demostrar que,

$$K = \frac{(AB)(BC)sen\ \beta}{2} \text{ y } K = \frac{(AC)(BC)sen\ \gamma}{2}.$$

k) Teorema 1.16.9 (Bisectriz generalizada)

Sea ABC cualquier triángulo y CL una recta cualquiera que pasa por el vértice C. Sean α_1 y α_2 los ángulos determinados por AL con AC y BC respectivamente. Demuestre que:

$$\frac{AL}{LB} = \frac{AC\ sen\ \alpha_1}{BC\ sen\ \alpha_2}.$$

Demostración:

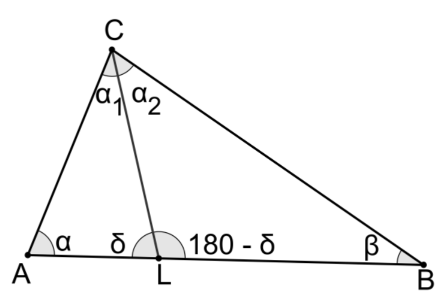


Figura 1.9

Si se aplica la Ley de los Senos a los triángulos ALC y LBC se tiene:

$$\frac{AL}{sen\,\alpha_1} = \frac{AC}{sen\ \delta},\ \frac{LB}{sen\,\alpha_2} = \frac{BC}{sen\ (180-\delta)}.$$

Despejando AL y LB de estas ecuaciones,

$$AL = \frac{AC\ sen\ \alpha_1}{sen\ \delta},\ LB = \frac{BC\ sen\ \alpha_2}{sen\ (180° - \delta)}.$$

Pero, sen δ = sen (180º - δ), de donde, $\frac{AL}{LB} = \frac{AC\ sen\ \alpha_1}{BC\ sen\ \alpha_2}$.

Ejrecicios

1) *Sea ABC un triángulo y P un punto sobre el lado AB, demuestre que:*

$$(AB)\,(CP)^2 + (AP)(PB)(AB) = (AP)\,(BC)^2 + (PB)(AC)^2$$

Este resultado se conoce como el Teorema de Stewart.

2) *Dado un triángulo ABC, calcule la longitud de sus medianas.*

3) *Dado un triángulo ABC, calcule la longitud de sus bisectrices.*

4) *Sean P y Q dos objetos inaccesibles, pero visibles desde A y B, como en la figura 1.123. Calcule la distancia entre P y Q, si se tiene que* α = *48.58º,* β = *41.87º,* γ = *54.72º,* δ = *42.78º y AB = 256.*

5) *Sea ΔABC, con ángulos interiores α, β y γ, opuestos a los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea r el radio del circuncírculo del ΔABC. Demuestre que* $\frac{BC}{sen\ \alpha} = \frac{AC}{sen\ \beta} = \frac{AB}{sen\ \gamma} = 2r$.

6) *Demuestre que si ΔABC es isósceles y P un punto cualquiera en la base BC del triángulo, entonces ΔABP y ΔACP tienen circunradios iguales.*